学校编码：**10384** 分类号_______密级_______

学号：**19020131152642** **UDC**_______

硕 士 学 位 论 文

Monomial代数的重复代数和平凡扩张代数

The repetitive algebras and trivial extension algebras of monomial algebras

蔡毓麟

指导教师姓名： 林 亚 南 教授

专 业 名 称： 基 础 数 学

论文提交日期： 2016 年 月

论文答辩时间： 2016 年 月

学位授予日期： 2016 年 月

答辩委员会主席：____________

评 阅 人：____________

2016 年 月

Master Dissertation

The Repetitive Algebras and the Trivial Extension Algebras of Monomial Algebras

Yulin Cai

Supervisor: Yannan Lin

Speciality: Fundamental mathematics

Institution: School of Mathematical Sciences

Xiamen University

Xiamen, P.R. China

2016

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

Monomial代数的重复代数和平凡扩张代数

摘　要

本文利用相应的底图和关系刻画monomial代数的重复代数和平凡扩张代数, 并用此给出monomial代数到其平凡扩张代数Loewy长度的公式. 全文共分为五章.

第一章介绍了研究背景以及相关领域的发展动态，并介绍了本文的研究工作.

第二章回顾了本文所需的预备知识. 首先介绍了基代数以及基代数和带关系的箭图之间的联系, 然后介绍了代数的重复代数的$n-$逼近代数和平凡扩张代数, 以及我们主要讨论的monomial代数. 证明了基代数的重复代数的$n-$逼近代数和平凡扩张代数都是基代数.

第三章主要讨论monomial代数的重复代数的箭图刻画. 首先引进了局部最长路和局部最长路空间的定义, 进一步给出monomial代数重复代数的箭图刻画, 并给出其上的3种关系, 从而得到monomial代数的重复代数的刻画.

第四章讨论了monomial代数的平凡扩张代数的箭图刻画以及相关结论. 首先由于重复代数和平凡扩张代数的相似性, 我们可以类似给出monomial代数的平凡扩张代数的箭图和关系的刻画, 并进一步描述一个代数是monomial代数的平凡扩张代数的充要条件以及还原所有对应的monomial代数.

第五章主要给出第三章和第四章中主要定理应用的一些例子以及有关Lowey长度的应用.

关键词：重复代数; 平凡扩张代数; 底图; monomial代数; Loewy长度

The Repetitive Algebras and the Trivial Extension Algebras of Monomial Algebras

ABSTRACT

We describe the repetitive algebra and the trivial extension algebra of monomial algebra by using the corresponding ordinary quivers and relations, and use these to give the formula of Loewy length of monomial algebra to its trivial extension algebra's. And it includes five chapters.

In chapter one, we introduce the background and development of the related researches, and the main results of this thesis.

In chapter two, we will review the required preliminary knowledge. At first, we introduce the definition of basic algebras and the relationships between basic algebras and the quivers with relations(or bound quiver algebras). Then we introduce the n-approaching algebras of repetitive algebras, the trivial extension algebras and the monomial algebras. We will prove that the n-approaching algebras of a basic algebra's repetitive algebra and the trivial extension algebra of a basic algebra are all basic.

In chapter three, we will give a description of repetitive algebras of monomial algebras in the ordinary quiver way. Firstly, we introduce the definitions of locally maximum paths and locally maximum path spaces, then construct the ordinary quivers and 3 relations of repetitive algebras of monomial algebras.

In chapter four, we will talk about the ordinary quivers of trivial extension algebras of monomial algebras and other related conclusions. Firstly, because of the similarity between the repetitive algebras and the trivial extension algebras, we can give the quivers and relations of trivial extension algebras of monomial algebras in the similar way, and then based on this, we give a sufficient and necessary condition for trivial extension algebras of monomial algebras and a method to reconstruct all of its corresponding monomial algebras.

In chapter five, we give some applications of main theorems in chapter three and chapter four in some examples and a result about the Lowey length.

Key Words: repetitive algebra; trivial extension algebra; ordinary quiver; monomial algebra; Loewy length

目　录

CONTENTS

第一章　引　言

代数表示论是二十世纪中后期兴起的一个代数学的全新的研究领域, 同时也是目前代数中最具活力的前沿方向. 它最初最基本的研究任务是刻画代数的模范畴, 但是随着研究的不断深入, 它与群表示、李代数、代数几何等方向产生了非常密切的联系. 对数学以外的量子物理、化学等其他学科也有及其重要的应用.

箭图和约束箭图、几乎可裂序列、AR-箭图、倾斜理论、覆盖理论等等, 都是代数表示论经典的研究内容和工具, 其中箭图和约束箭图是最基本的内容, 也是我们理解一个代数最直观的方法之一, 这是由于我们有范畴的等价$\mathrm{Rep}(Q,\mathcal{I}) \cong \mathrm{Mod}-KQ/\mathcal{I}$, 并且Gabriel首先证明了代数闭域上基代数总同构于$KQ/\mathcal{I}$ 的形式, 而对任意有限维代数A, 存在基代数A^b使得有范畴等价$\mathrm{Mod}-A \cong \mathrm{Mod}-A^b$. 更进一步, Gabriel证明了有限表示型的遗传代数只有Dynkin图$A_m(m \geq 1)$、$D_n(n \geq 4)$、E_6、E_7、E_8对应的路代数.

代数的重复代数(repetitive algebra)首先是由Hughes和Waschbüsch在[2]引进, 是一个自入射的无限维的三角矩阵代数, 它与代数的导出范畴(derived category)相关, Happle在[3]中指出, 如果代数A 有有限的整体维数, 那么其重复代数的稳定(stable)的模范畴三角等价于A 的导出范畴. 另一方面, 重复代数也是构造有限维自入射代数一个方法, Skowroński和Yamagata在[8]中研究了一个自入射代数是由重复代数作为Galois覆盖得到的充分条件.

代数的平凡扩张代数(trivial extension algebra)给出了一个构造新代数的方法, 从中我们也可以得到它们之间的关系. 在这之前已经有一些文章研究了在某些代数, 特别是遗传(hereditary)代数及其平凡扩张的上的不可分解对象的联系, 例如Tachikawa在[9]中证明了如果代数A是遗传有限表示型代数, 那么其平凡扩张代数是有限表示型的. 另一方面, 我们也想了解它们底图方面的联系, 这也有利于我们对平凡扩张有一个更好的理解. 平凡扩张代数是重复代数的商代数, 实际上, 重复代数是平凡扩张的Galois覆盖, 因此重复代数的刻画基本可以得到平

凡扩张代数的刻画.

这篇文章主要就对一类代数, 即monomial代数的重复代数和平凡扩张代数的底图和关系进行刻画。

在本文中，A是代数闭域K上含单位元1的有限维基的(basic)代数, 根据文献[1], 有$K-$代数同构$A \cong KQ/I$, 这里$Q = (Q_0, Q_1; \mathrm{s}, \mathrm{t})$ 是A 对应的底图(ordinary quiver),其顶点集Q_0与A的完备的本原正交幂等元集$\{e_i\}_{i=1}^n$一一对应, 而e_i 到e_j的箭头$e_iQ_1e_j$与$K-$ 线性空间$e_i(\mathrm{rad}A/\mathrm{rad}^2A)e_j$的一组基一一对应, $\mathrm{s}, \mathrm{t} : Q_1 \to Q_0$表示箭的源点和汇点, 而$I$是$A$对应的可容理想(admissible ideal), 是由Q中某些长度大于2的路之间关系生成的KQ的理想. 我们用P表示箭图Q的所有路组成的集合.

我们用DA表示A的$K-$对偶, 即$\mathrm{D}A = \mathrm{Hom}_K(A, K)$, $\widehat{A}$ 表示A的重复代数, TA表示A的平凡扩张, $\widetilde{Q}$ 和$\widetilde{I}$ 分别表示TA对应的底图和可容理想.

我们知道代数KQ的一个可容理想I是monomial的, 如果I由一些长度至少为2的路生成(允许这些路的集合是空集,即$I = 0$), 此时称代数KQ/I是monomial代数.

在此基础上, 我们引入了局部最长路的定义, 并由此定义了$\widehat{Q}, \widehat{I}$, 证明了

定理 1.1: 设A是K上的mononial代数, 则$\widehat{A} \cong K\widehat{Q}/\widehat{\mathcal{I}}$.

类似地, 平凡扩张有相应结论

定理 1.2: 设A是K上的mononial代数, 则$\mathrm{T}A \cong K\widetilde{Q}/\widetilde{\mathcal{I}}$.

进一步, 我们完整刻画了mononial代数的平凡扩张代数, 即给出了充要条件

定理 1.3: 设A是K上的基代数, $Q, \mathcal{I}$是A对应的底图和可容理想, 则A是monomial代数的平凡扩张代数当且仅当I由零关系和相等关系生成, 且存在Q的子图$C_1, \cdots, C_k$, 其中C_i为圈,满足

(1) $C_1 \bigcup \cdots \bigcup C_k = Q$;
(2) 对任意C_i, 存在箭$\alpha_i \in P_i \setminus \bigcup\limits_{j \neq i} P_j$, 其中$P_i$为$C_i$上所有的路;

(3) 对任意Q上的路ρ, 在A中有$\rho = 0$当且仅当下列条件之一成立

i 对任意的$1 \leq i \leq k$, $\rho \notin P_i$;

ii 存在$1 \leq i \leq k$, 使得$\rho \in P_i$, 但$l(\rho) > l_i$, 其中l_i为C_i的周长;

(4) 对两条不同的路$\rho_1 \in P_i$, $\rho_2 \in P_j$, 在A中不为0且有$\rho_1 = \rho_2$当且仅当存在$\rho \in P_i \bigcap P_j$, $l(\rho) \leq l_i, l_j$, 使得$\rho_1 = \rho^{C_i}, \rho_2 = \rho^{C_j}$, 其中$\rho^{C_i}, \rho^{C_j}$分别是$\rho$在$C_i$,$C_j$中的补路.

根据定理, 我们定义了完备圈集, 从而给出以代数A为平凡扩张代数的所有monomial代数的构造和个数的上界.

推论 1.4: 设A是K上monomial代数的平凡扩张代数, $\{C_1, \cdots, C_k\}$是A的完备圈集, Λ_i是C_i上所有的箭, 且令$n_i = \#(\Lambda_i \setminus \bigcup\limits_{j \neq i} \Lambda_j)$, 则以$A$为平凡扩张代数的monomial代数在$K-$代数同构下不超过$\prod\limits_{i=1}^{k} n_i$个.

需要指出的是, 本文的结果都是独立完成的, 但遗憾的是, 本文中关于重复代数的结果已经由J.Schröer在[4]中完成, 而关于平凡扩张代数的刻画, E. A. Fernández和M. I. Platzeck在[5]和[6]中也已经给出.

第二章　预备知识

这一章作为预备知识, 本论文只讨论K为代数闭域的情形, 我们假定大家都已经熟悉代数、理想和模的概念, 所以我们主要回顾了有限维代数和约束箭图代数上的一些性质.

§ 2.1　基代数与箭图

本节内容主要取自文献[1], 除非特殊说明, 否则$K-$代数都假定带有单位元1.

§ 2.1.1　根、幂等元与基代数

定义 2.1: 有限维$K-$代数A的根(Jacobson radical) $\mathrm{rad}A$是A的所有极大右理想的交集.

引理 2.2: $\mathrm{rad}A$是A的所有极大左理想的交集

证明: 文献[1], p5. □

定义 2.3: 右A模M的根(Jacobson radical) $\mathrm{rad}M$是M的所有极大子模的交集.

容易看到代数A作为代数的根和作为右A模的根是一致的.

命题 2.4: 设M, N是右A模,则

(a) $\mathrm{rad}(M \oplus N) = \mathrm{rad}M \oplus \mathrm{rad}N$.

(b) $\mathrm{rad}M = M\mathrm{rad}A$.

证明: 文献[1], p15. □

定义 2.5: 设A是K上的有限维代数, $e \in A$称为幂等元(idempotent), 若$e^2 = e$. A上的两个幂等元e_1, e_2称为是正交的(orthogonal), 若$e_1e_2 = e_2e_1 = 0$. 幂等元e 称

为是本原的(primitive), 若e不能写成$e=e_1+e_2$的形式, 这里e_1,e_2是非0的正交幂等元.

集合$\{e_1,\cdots,e_n\}\subset A$称为完备的本原正交幂等元集(complete set of primitive orthogonal idempotents), 若$e_1,\cdots,e_2$是两两正交的本原幂等元, 且$1=e_1+\cdots+e_n$.

注意到代数A有两个平凡的幂等元0和1. 对有限维代数A, 完备的本原正交幂等元集一定存在. 事实上, 若A有非平凡的幂等元e, 则$1-e$也是非平凡的幂等元, 且$(1-e)e=e(1-e)=0$, 如果e非本原, 那么存在非0的正交幂等元e_1,e_2使得$e=e_1+e_2$, 同时有$e_1(1-e)=e_1^2(1-e)=-e_1e_2(1-e)=0$, 同理$e_2(1-e)=(1-e)e_1=(1-e)e_2=0$, 从而$e_1,e_2,1-e$是两两正交的幂等元, 且$1=e_1+e_2+(1-e)$. 我们可以进行这样的过程, 直到所有的幂等元都是本原的, 同时是两两正交的, 但是否能在有限步里得到? 我们注意到, 若$1=e_1+\cdots+e_n$, 则作为线性空间有$A=e_1A\oplus\cdots\oplus e_nA$, 同时$\mathrm{dim}e_iA\leq 1$, 而$\mathrm{dim}A<\infty$, 从而可在有限步内停止. 由此我们证明了下面结论:

命题 2.6: 若A是有限维代数, 那么A有完备的本原正交幂等元集.

引理 2.7: 若$e\in A$是本原幂等元, 则$\mathrm{rad}eA=e\mathrm{rad}A\subset eA$是$eA$的唯一的真子模.

证明: 文献[1], p20. □

引理 2.8: 幂等元$e\in A$是本原的当且仅当代数eAe只有两个幂等元0和e.

证明: 文献[1], p22. □

定义 2.9: 设A是K上的有限维代数, $\{e_1,\cdots,e_n\}$是A上的完备的本原正交幂等元集. 代数A称为是基的(basic), 若作为右$A-\mathrm{mod}$, 对任意$i\neq j$, $e_iA\ncong e_jA$.

命题 2.10: 有限维$K-$代数A是基的当且仅当代数$A/\mathrm{rad}A$同构于$K\times\cdots\times K$.

基代数是代数表示论中重要的研究对象, 主要在于下面的定理:

定理 2.11: 设A是K上的有限维代数, 则存在基代数A^b, 使得有$K-$线性的范畴等价$\mathrm{mod}-A\cong\mathrm{mod}-A^b$.

证明: 文献[1], p37. □

我们主要讨论代数与箭图, 所以论文不阐述A^b的构造.

§ 2.1.2 约束箭图代数与monomial代数

定义 2.12: 设Q是一个四元组$Q = (Q_0, Q_1, \mathrm{s}, \mathrm{t})$, 其中$Q_0$是点的集合, Q_1是箭向的集合,$\mathrm{s}, \mathrm{t} : Q_1 \to Q_0$是映射, 即对箭向$\alpha$, 点$\mathrm{s}(\alpha)$是$\alpha$的起点, 点$\mathrm{t}(\alpha)$是$\alpha$的终点. 记为

$$\mathrm{s}(\alpha) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{t}(\alpha)$$

我们称这样的四元组是一个箭图. 当$|Q_0| < \infty$且$|Q_1| < \infty$时, 称Q为有限箭图. 除非特殊说明, 不然本文中的箭图Q都是有限箭图.

定义 2.13: 一个箭图Q中的一条非平凡的路是指箭向的序列$\rho = \alpha_1 \cdots \alpha_m (m \leq 1)$, 并且对$1 \leq i \leq m$, 满足$\mathrm{t}(\alpha_i) = \mathrm{s}(\alpha_{i+1})$, 可以描述为

$$\bullet \xrightarrow{\alpha_1} \bullet \cdots \bullet \xrightarrow{\alpha_m} \bullet$$

我们称这样的路为长度为m的路, 记$l(\rho) = m$. 对于任意点$a \in Q_0$, 我们称ε_a为平凡路, 其中$\mathrm{s}(\varepsilon_a) = \mathrm{t}\varepsilon_a = a$ 且$l(\varepsilon_a) = 0$. 我们通常用$\mathrm{s}(\rho)$和$\mathrm{t}(\rho)$表示路ρ的起点和终点.

箭图Q中所有的路作为基向量构成$K-$线性空间KQ.定义两条路ρ_1, ρ_2的乘积按照以下方式给出

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \begin{cases} \rho_1\rho_2, & \text{当}\mathrm{t}(\rho_1) = \mathrm{s}(\rho_2)\text{时;} \\ 0, & \text{其他情况.} \end{cases}$$

KQ的乘法按路的乘法线性张成. 这样, KQ构成一个结合代数, 仍记为KQ, 称为箭图Q的路代数(path algebra).

定义 2.14: 箭图Q上的一个(带K中系数的)关系(relation)是有限条路的$K-$线性组合, 这些路的长度至少为2, 且有相同的起点和终点. 因此, 一个关系r是KQ中的一个元素

$$r = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \rho_i,$$

这里$\lambda_i \in K$不全为0, ρ_i是Q上长度至少为2的路, 且对$i \neq j$, ρ_i和ρ_j有相同的起点和终点. 当$m = 1$时, 上述关系称为零关系, 或monomial关系.

路代数KQ的一个可容理想(admissible ideal)$\mathcal{I}$是由有限个关系生成的理想. 即存在一个有限的关系的集合$\{r_1, \cdots, r_m\}$使得$\mathcal{I} = \langle r_1, \cdots, r_m \rangle$.

若I是KQ的可容理想, 二元组$(Q, \mathcal{I})$称为约束箭图(bounded quiver), 商代数$KQ/\mathcal{I}$称为约束箭图代数(bounded quiver algebra). 当可容理想$\mathcal{I}$ 可由有限个monomial关系生成时, $KQ/\mathcal{I}$称为monomial代数.

下面我们就约束箭图代数, 刻画关于上一小节中定义的概念.

引理 2.15: 集合$\{e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I} | a \in Q_0\}$是$KQ/\mathcal{I}$的完备的本原正交幂等元集, 这里$\varepsilon_a$是$a \in Q_0$的平凡路.

证明: 文献[1], p55. □

引理 2.16: 设$R_Q \subset KQ$所有长度不为0的箭向生成的理想, $\mathcal{I}$是KQ的可容理想理想, 则$\mathrm{rad}(KQ/\mathcal{I}) = R_Q/\mathcal{I}$, 且$KQ/\mathcal{I}$是基代数.

证明: 文献[1], p57. □

§ 2.1.3　底图

定义 2.17: 设A是K上的有限维基代数,$\{e_1, \cdots, e_n\}$是A的完备的本原正交幂等元集. A 的底图(ordinary quiver)Q_A由下列定义:

(a) Q_A上的点集$(Q_A)_0\{1, \cdots, n\}$与$\{e_1, \cdots, e_n\}$一一对应.
(b) 对给定的两个点$a, b \in (Q_A)_0$, 箭向集合$\{\alpha | \, a \xrightarrow{\alpha} b\}$与$K-$线性空间$e_a(\mathrm{rad}A/\mathrm{rad}^2 A)e_b$的一组基一一对应.

引进底图和可容理想的意义在于下列定理:

定理 2.18: 若A是K上的有限维基代数, 则存在KQ_A的可容理想$\mathcal{I}$使得$A \cong KQ_A/\mathcal{I}$.

证明: 文献[1], p64. □

§ 2.2 重复代数

从这一节开始, 设A是域K上含单位元1的有限维代数, $\{e_i\}_{i=1}^n$是A上的一个完备的本原正交幂等元集, $\mathrm{D}A$是代数A的$K-$对偶, 即$\mathrm{D}A = \mathrm{Hom}_K(A, K)$.

$K-$代数A的重复代数在[2]定义如下:

定义 2.19: K上的有限维代数A的重复代数为矩阵代数(无单位元1)$\widehat{A}$:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} \ddots & \mathrm{D}A_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & A_i & \mathrm{D}A_i & 0 \\ & 0 & A_{i+1} & \mathrm{D}A_{i+1} \\ & & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

这里$A_i = A, \mathrm{D}A_i = \mathrm{D}A, i \in \mathbb{Z}$, 且只有有限个位置不为0. $\widehat{A}$上的乘法由$\mathrm{D}A$作为左$A-$右$A-$双模结构和$\mathrm{D}A \otimes \mathrm{D}A \to 0$诱导.

由上述定义可以知道重复代数$\widehat{A}$是一个无限维的$K-$代数, 我们通过一系列的有限维$K-$代数$\{\widehat{A}_l\}_{l\in\mathbb{N}^+}$来逼近, 其中$\widehat{A}_l \subset \widehat{A}$称为$l-$逼近代数, 定义如下:

$$\widehat{A}_l = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & & & \\ & 0 & 0 & & & & & \\ & & A_{-l} & \mathrm{D}A_{-l} & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & \mathrm{D}A_{l-1} & & \\ & & & & & A_l & 0 & \\ & & & & & & 0 & \ddots \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

容易知道$\widehat{A} = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} \widehat{A}_l$.

对$1 \le i \le n, j \in \mathbb{Z}$, $e_i^{(j)} \in \widehat{A}$是在$(j, j)$为$e_i$, 其余位置为0的矩阵; 对$l \in \mathbb{N}^+$, $E_l \in \widehat{A}$是在(j, j)为1, $-l \le j \le l$, 其余位置为0的矩阵.

引理 2.20: E_l是$\widehat{A}_l$的单位元, $\{e_i^{(j)} | 1 \le i \le n, -l \le j \le l\}$是$\widehat{A}_l$上的一个完备的本原正交幂等元集.

证明: 容易计算得到: E_l是$\widehat{A}_l$的单位元, 且$E_l = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=-l}^{l} e_i^{(j)}$. 另一方面, 有$i \neq k$或$j \neq l$, $e_i^{(j)}e_k^{(l)} = 0$, 而$e_i^{(j)}e_i^{(j)} = e_i^{(j)}$. 下面证明本原性: 事实上, 经过计算, 容易得到$K-$代数同构$e_i^{(j)}\widehat{A}e_i^{(j)} \simeq e_iAe_i$, 从而$\{e_i^{(j)}|1 \leq i \leq n, -l \leq j \leq l\}$是本原正交幂等元集. 因此$\{e_i^{(j)}|1 \leq i \leq n, -l \leq j \leq l\}$是$\widehat{A}_l$上的一个完备的本原正交幂等元集. □

命题 2.21: $\mathrm{rad}\widehat{A}_l = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & & & & \\ & 0 & 0 & & & & & & \\ & & \mathrm{rad}A_{-l} & \mathrm{D}A_{-l} & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & \mathrm{D}A_{l-1} & & & \\ & & & & & \mathrm{rad}A_l & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots & \end{pmatrix}$, 且$\widehat{A}_l$是$K$上的基代数当且仅当$A$是$K$上的基代数.

证明: 代数A可看成$\widehat{A}_l$的子代数, 通过把A中的元素映到从$-l$到l的对角元上.

设$B_l = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & & & & \\ & 0 & 0 & & & & & & \\ & & \mathrm{rad}A_{-l} & \mathrm{D}A_{-l} & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & \mathrm{D}A_{l-1} & & & \\ & & & & & \mathrm{rad}A_l & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots & \end{pmatrix}$ 根据$\widehat{A}_l$的乘法, 容易验证对$1 \leq i \leq n, -l \leq j \leq l$, $e_i^{(j)}B_l$是$e_i^{(j)}\widehat{A}_l$的子右$\widehat{A}_l$模, 也是子右A模, 且有右A 模同构

$$e_i^{(j)}\widehat{A}_l/e_i^{(j)}B_l \cong (e_iA/\mathrm{rad}e_iA)$$

由于$A/\mathrm{rad}A$是单的右A模, 则$e_i^{(j)}B_l$是$e_i^{(j)}\widehat{A}_l$的极大右A子模, 同时也是极大右$\widehat{A}_l$子模, 因为右$\widehat{A}_l$子模必然是右A子模. $e_i^{(j)}\mathrm{rad}_{\widehat{A}_l}\widehat{A}_l = \mathrm{rad}_{\widehat{A}_l}e_i^{(j)}\widehat{A}_l = e_i^{(j)}B_l$,

从而$\mathrm{rad}\widehat{A}_l = B_l$. 进一步地有$K-$代数的同构

$$\widehat{A}_l/\mathrm{rad}\widehat{A}_l \cong (A/\mathrm{rad})^{\oplus 2l+1},$$

从而我们知道$\widehat{A}_l/\mathrm{rad}\widehat{A}_l$作为$K-$代数同构与$(K \times \cdots \times K)^{\oplus 2l+1}$当且仅当$A/\mathrm{rad}A$同构与$K \times \cdots \times K$, 命题得证. □

§ 2.3 平凡扩张代数

$K-$代数A的平凡扩张代数在[3]的定义如下:

定义 2.22: 设A是域K上含单位元1的有限维代数, $\mathrm{D}A$是代数A的$K-$对偶, 即$\mathrm{D}A = \mathrm{Hom}_K(A, K)$, $\mathrm{D}A$是一个$K-$线性空间, 且是一个左$A-$ 右$A-$ 双模. 在$A \oplus \mathrm{D}A$上定义数乘, 加法和乘法如下: 对任意的$k \in K$, 任意的$(a, f), (a', f') \in A \oplus \mathrm{D}A$,

$$k(a, f) = (ka, kf)$$

$$(a, f) + (a', f') = (a + a', f + f')$$

$$(a, f)(a', f') = (aa', fa' + af')$$

容易验证$A \bigoplus \mathrm{D}A$在上述运算下成为一个$K-$代数, 称为A是平凡扩张代数, 记为$\mathrm{T}A$.

类似地, 下面我们要求$\mathrm{T}A$的完备的本原正交幂等元集, 并证明当A是基代数的时候, $\mathrm{T}A$是基代数.

引理 2.23: $(1, 0)$是$\mathrm{T}A$的单位元, $\{(e_i, 0)\}_{i=1}^n$是$\mathrm{T}A$上的一个完备的本原正交幂等元集.

证明: 对任意的$(a, f) \in \mathrm{T}A$, 有$(1, 0)(a, f) = (a, 1f + 0a) = (a, f) = (a, f)(1, 0)$, 从而$(1, 0)$是$\mathrm{T}A$的单位元.

由$\{e_i\}_{i=1}^n$是A上的一个完备的本原正交幂等元集, 则可知$(1, 0) = \sum\limits_{i=1}^{n}(e_i, 0)$, 且$(e_i, 0)(e_j, 0) = (e_ie_j, 0e_j + e_i0) = \delta_{i,j}(e_i, 0)$, 其中$\delta_{i,j} = 1$当且仅当$i = j$, $(e_i, 0)\mathrm{T}A(e_i, 0) = e_iAe_i \oplus e_i(\mathrm{D}A)e_i$. 从而可知$\{(e_i, 0)\}_{i=1}^n$ 是$\mathrm{T}A$上的一个完备

的正交幂等元集, 只需再说明对任意的$1 \leq i \leq n$, $(e_i, 0)$是A上的本原幂等元, 即$(e_i, 0)$是代数$e_iAe_i \oplus e_i(\mathrm{D}A)e_i$ 上仅有的非零幂等元即可.

实际上, 设(e_iae_i, e_ife_i)是$e_iAe_i \oplus e_i(\mathrm{D}A)e_i$一个幂等元，即有

$$(e_iae_i, e_ife_i)(e_iae_i, e_ife_i) = ((e_iae_i)^2, e_iae_ife_i + e_ife_iae_i) = (e_iae_i, e_ife_i),$$

从而有

$$(e_iae_i)^2 = e_iae_i, e_iae_ife_i + e_ife_iae_i = e_ife_i,$$

由此可知，e_iae_i是e_iAe_i的一个幂等元. 另一方面, 由于e_i是A的一个本原幂等元, 则e_iAe_i幂等元只有e_i和0, $e_iae_i = e_i$ 或$e_iae_i = 0$.

当$e_iae_i = e_i$时, 可知$e_iae_ife_i + e_ife_iae_i = 2e_ife_i = e_ife_i$, 从而$e_ife_i = 0$, 即$(e_iae_i, e_ife_i) = (e_i, 0)$.

当$e_iae_i = 0$时, 可知$e_iae_ife_i + e_ife_iae_i = 0 = e_ife_i$, 从而$e_ife_i = 0$, 即$(e_iae_i, e_ife_i) = (0, 0)$.

由此可知$(e_i, 0)$是$e_iAe_i \oplus e_i(\mathrm{D}A)e_i$上仅有的非零幂等元, 从而命题得证. □

命题 2.24: $\mathrm{rad}\mathrm{T}A = \mathrm{rad}A \oplus \mathrm{D}A$, 且$\mathrm{T}A$是$K$上的基代数当且仅当$A$是$K$上的基代数.

证明: 从$((\mathrm{rad}e_iA) \oplus e_i\mathrm{D}A)\mathrm{T}A = \mathrm{rad}e_iA \oplus (e_i\mathrm{D}A + e_i(\mathrm{rad}A \cdot \mathrm{D}A)) = (\mathrm{rad}e_iA)) \oplus e_i\mathrm{D}A$, 可知$(\mathrm{rad}e_iA) \oplus e_i\mathrm{D}A$是$e_iA \oplus e_i\mathrm{D}A$的子模. 注意到$e_iA \oplus e_i\mathrm{D}A$和$(\mathrm{rad}e_iA) \oplus e_i\mathrm{D}A$ 同时也是$A-$模, 而且有$A-$模同构

$$(e_iA \oplus e_i\mathrm{D}A)/((\mathrm{rad}e_iA) \oplus e_i\mathrm{D}A) \cong e_iA/(\mathrm{rad}e_iA).$$

另一方面$e_iA/(\mathrm{rad}e_iA)$是单$A-$模，从而可以知道$(\mathrm{rad}e_iA) \bigoplus e_i\mathrm{D}A$是$e_iA \oplus e_i\mathrm{D}A$的极大$A-$子模, 也是极大$\mathrm{T}A-$子模. 则我们有$(e_i, 0)\mathrm{rad}_{\mathrm{T}A}(A \oplus \mathrm{D}A) = \mathrm{rad}_{\mathrm{T}A}(e_iA \oplus e_i\mathrm{D}A) = (\mathrm{rad}e_iA) \oplus e_i\mathrm{D}A$, $\mathrm{rad}\mathrm{T}A = \mathrm{rad}A \oplus \mathrm{D}A$, 进一步地有$K-$代数同构:

$$\mathrm{T}A/\mathrm{rad}\mathrm{T}A \cong A/\mathrm{rad}A.$$

从而我们知道$\mathrm{T}A/\mathrm{rad}\mathrm{T}A$作为$K-$代数同构与$K \times \cdots \times K$当且仅当$A/\mathrm{rad}A$同构与$K \times \cdots \times K$, 命题得证. □

第三章　Monomial代数的重复代数

§ 3.1　局部最长路空间

在这一节中，设A是域K上含单位元1的有限维代数, $\mathrm{D}A$表示A的$K-$对偶, Q_1表示Q上的箭头, P表示Q上所有的路.

定义 3.1: 设A是K上的有限维基代数, $Q,\mathcal{I}$是A对应的底图和可容理想, Q上的路ρ称为局部最长路, 若$0\neq\rho\in A$, 且对任意Q上的箭头α, 有$0=\alpha\rho=\rho\alpha\in A$.

设$e_i,e_j\in Q_0$, 则将从e_i到e_j的所有局部最长路自由生成$K-$线性空间记为$F_{i,j}$, 从而有自然映射$F_{i,j}\to A$, 核记为$\mathcal{I}_{i,j}$, 称$F_{i,j}/\mathcal{I}_{i,j}$为从$e_i$到$e_j$局部最长路空间, 记为$LM_{i,j}$, 显然$LM_{i,j}$为$e_iAe_j$的子空间. 全体局部最长路生成的$A$的子空间记为$LM$, 从而有$LM_{i,j}=e_iLMe_j$.

在讨论局部最长路空间之前, 我们先得到mononial代数的一个简单的性质.

引理 3.2: 设A是K上的mononial代数, $Q,\mathcal{I}$是A对应的底图和可容理想, $\mathcal{I}=\langle\rho_t|1\leq t\leq s\rangle$, 其中$\rho_t$是$Q$上的路. 则$P\setminus\{\alpha\rho_t\beta|\alpha,\beta\in Q,1\leq t\leq s\}$构成$A$的一个$K-$基, 称为$A$的$K-$路基, 记为$\Gamma$. 由此可知所有局部最长路恰好组成$LM$ 的一个$K-$基.

证明: 取Γ中任意有限子集Γ', 若在A上, 有$\overline{\sum\limits_{\gamma\in\Gamma'}k_\gamma\gamma}=0$, 其中$k_\gamma\in K$, 则$\sum\limits_{\gamma\in\Gamma'}k_\gamma\gamma\in\mathcal{I}$, 从而在$KQ$上有$\sum\limits_{\gamma\in\Gamma'}k_\gamma\gamma=\sum\limits_{\substack{1\leq t\leq s\\ \alpha,\beta\in Q}}k_{\alpha\rho_t\beta}\alpha\rho_t\beta$, 其中只有有限个$k_{\alpha\rho_t\beta}$不为0. 而我们知道$Q$构成$KQ$ 的一个$K-$ 基, 则$k_\gamma=0,\gamma\in\Gamma'$. 从而可知$\Gamma$在$A$上线性无关, $\#\Gamma\leq\dim_K A<\infty$.

另一方面, 对任意$x\in A$, 存在$y\in KQ$, 使得$x=\overline{y}\in A$, 而设$y=\sum\limits_{\gamma\in\Gamma'}k_\gamma\gamma+\sum\limits_{\substack{1\leq t\leq s\\ \alpha,\beta\in Q}}k_{\alpha\rho_t\beta}\alpha\rho_t\beta$, 其中只有有限个$k_{\alpha\rho_t\beta}$ 不为0, 从而$x=\overline{y}=\sum\limits_{\gamma\in\Gamma'}k_\gamma\overline{\gamma}$, 由此可知$\Gamma$线性生成$A$. □

引理 3.3: 有双边$A-$模满同态$\mathrm{D}A/(\mathrm{rad}_A(\mathrm{D}A)+\mathrm{rad}(\mathrm{D}A)_A) \twoheadrightarrow \mathrm{D}(LM)$, 且当$A$是$K$上的mononial代数时, 这个同态是同构.

证明: 有自然的双$A-$模嵌入$LM \hookrightarrow A$, 从而有满射$\pi : \mathrm{D}A \twoheadrightarrow \mathrm{D}(LM)$, 下面证明$\mathrm{rad}_A(\mathrm{D}A)+\mathrm{rad}(\mathrm{D}A)_A = \mathrm{rad}A(\mathrm{D}A)+(\mathrm{D}A)\mathrm{rad}A \subset \mathrm{Ker}\pi$.事实上, 任意取$A$的一个由路组成的$K-$基$\Gamma$, 设$\Gamma'$ 是Γ 的对偶基, $f_\alpha \in \Gamma$是路$\alpha \in \Gamma$对应的线性映射, 对任意路长不为0的路$\beta \in \Gamma$, 任意的局部最长路ρ, 有$(\beta f_\alpha)(\rho) = f_\alpha(\rho\beta) = f_\alpha(0) = 0$, 同理$(f_\alpha\beta)(\rho) = 0$, 即$\beta f_\alpha, f_\alpha\beta \in \mathrm{Ker}\pi$, 从而$\mathrm{rad}_A(\mathrm{D}A) + \mathrm{rad}(\mathrm{D}A)_A \subset \mathrm{Ker}\pi$.

当A是K上的mononial代数时, 设Γ为A的$K-$路基, Γ'是Γ的对偶基, $f_\alpha \in \Gamma$是路$\alpha \in \Gamma$对应的线性映射, $M \subset \Gamma$ 是所有局部最长路组成的集合. 假设$\alpha \in \Gamma \setminus M$, 则存在路$\beta, \gamma \in \Gamma$使得$\beta\alpha\gamma \in M$, 其中$\beta, \gamma$至少有一条长度不为0, 那么容易验证$f_\alpha = \gamma f_{\beta\alpha\gamma}\beta$. 事实上, 对任意的$x = \sum\limits_{\sigma\in\Gamma} k_\sigma\sigma \in A$, $(\gamma f_{\beta\alpha\gamma}\beta)(\sum\limits_{\sigma\in\Gamma} k_\sigma\sigma) = \sum\limits_{\sigma\in\Gamma} k_\sigma f_{\beta\alpha\gamma}(\beta\sigma\gamma) = k_\alpha = f_\alpha(\sum\limits_{\sigma\in\Gamma} k_\sigma\sigma)$. 而$\beta \in \mathrm{rad}_A$或$\gamma \in \mathrm{rad}_A$, 从而对任意$\alpha \in \Gamma \setminus M$, $f_\alpha \in \mathrm{rad}_A(\mathrm{D}A) + \mathrm{rad}(\mathrm{D}A)_A$. 对任意的$f = \sum\limits_{\sigma\in\Gamma} k_\sigma f_\sigma \in \mathrm{D}A$, 若$f \in \mathrm{Ker}\pi$, 则对任意的$\alpha \in M$, $f(\alpha) = k_\alpha = 0$, 则$f = \sum\limits_{\sigma\in\Gamma\setminus M} k_\sigma f_\sigma \in \mathrm{rad}_A(\mathrm{D}A) + \mathrm{rad}(\mathrm{D}A)_A$, 从而$\mathrm{Ker}\pi \subset \mathrm{rad}_A(\mathrm{D}A) + \mathrm{rad}(\mathrm{D}A)_A$. □

推论 3.4: 设A是K上的mononial代数, $Q, \mathcal{I}$是A对应的底图和可容理想, $e_i, e_j \in Q_0$, 则$\dim_K e_i(\mathrm{D}A/(\mathrm{rad}_A(\mathrm{D}A)+\mathrm{rad}(\mathrm{D}A)_A))e_j = \dim_K LM_{j,i} = \#\{\gamma : j \to i \in \Gamma\text{是局部最长路}\}$.

§ 3.2　Monomial代数的重复代数的底图和关系

在这一节中， 设A是域K上有限维monomial代数, Q是A对应的底图, I是A对应的可容理想, 即有$K-$代数同构$A \cong KQ/\mathcal{I}$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ 是A 上的一个完备的本原正交幂等元集, Γ是A的$K-$路基, $\widehat{A}$是A的重复代数. 对$1 \le i \le n, j \in \mathbb{Z}$, $e_i^{(j)} \in \widehat{A}$是在$(j,j)$ 为e_i, 其余位置为0的矩阵.

下面我们主要讨论A是monomial代数的情况.

首先设箭图$\widehat{Q} = (\widehat{Q}_0, \widehat{Q}_1, \mathrm{s}, \mathrm{t})$: $\widehat{Q}_0 = \{(i,j)|1 \le i \le n, j \in \mathbb{Z}\}$, 令$Q^{(j)} = (Q_0^{(j)}, Q_1^{(j)}, \mathrm{s}, \mathrm{t})$为$\widehat{Q}$的满子图, 且在$Q_0^{(j)} = \{(i,j)|1 \le i \le n\}$与$\{e_i|1 \le i \le n\}$的

一一对应下, 有$Q^{(j)}=Q$, 让$Q^{(j)}$根据$\mathbb{Z}$排列, 即如下图, 最后$Q^{(j)}$到$Q^{(j+1)}$有箭头: $\#\{(i,j)\to(k,j+1)\}=\#\{\gamma:k\to i\in\Gamma$ 是局部最长路$\}$.

$$\cdots\ \ Q^{(-j)}\ \ \cdots Q^{(-1)}\ \ Q^{(0)}\ \ Q^{(1)}\ \ \cdots\ \ Q^{(j)}\ \ \cdots$$

为了区分Q和$Q^{(j)}$, 我们把Q上的路ρ对应的$Q^{(j)}$中路记为$\rho^{(j)}$, 而Q上的可容理想I对应的$Q^{(j)}$上的可容理想记为$I^{(j)}$, Q 上的局部最长路$\gamma:k\to i$ 对应的连接$Q^{(j)}$ 到$Q^{(j+1)}$的箭头记成$f_\gamma^{(j)}:(i,j)\to(k,j+1)$.

下面我们利用$\widehat{Q}$上的关系定义$K\widehat{Q}$的一个可容理想:

(1) 排他关系: 若$\beta,\beta'\in\Gamma$是局部最长路, 其中$\beta\neq\beta'$, 则

- 对$\alpha\in\Gamma$, 其中α不是β的一部分(即不存在$\gamma,\tau\in\Gamma$使得$\beta=\gamma\alpha\tau$), 那么对任意的$j\in\mathbb{Z}$有
$$\alpha^{(j)}f_\beta^{(j)}=f_\beta^{(j)}\alpha^{(j+1)}=0,$$
- 对任意$\sigma\in\Gamma$, $j\in\mathbb{Z}$有
$$f_\beta^{(j)}\sigma^{(j+1)}f_{\beta'}^{(j+1)}=0.$$

(2) 长度关系: 若$\beta\in\Gamma$是局部最长路, 设$\beta=\beta_1\alpha\beta_2$, 其中$\alpha\in Q_1$, 那么对任意的$j\in\mathbb{Z}$ 有
$$\alpha^{(j)}\beta_2^{(j)}f_\beta^{(j)}\beta_1^{(j+1)}\alpha^{(j+1)}=0.$$

(3) 分享关系: 若$\beta,\beta'\in\Gamma$是局部最长路, $\alpha\in\Gamma$, 其中$\beta\neq\beta'$, 且α同时是β和β'的一部分(即存在$\gamma,\tau,\gamma',\tau'\in\Gamma$使得$\beta=\gamma\alpha\tau,\beta'=\gamma'\alpha\tau'$), 那么对任意的$j\in\mathbb{Z}$有
$$\tau^{(j)}f_\beta^{(j)}\gamma^{(j+1)}=\tau'^{(j)}f_{\beta'}^{(j)}\gamma'^{(j+1)}.$$

我们假设由上述三种关系和$\mathcal{I}^{(j)}$, $j\in\mathbb{Z}$生成的$\widehat{Q}$上可容理想为$\widehat{\mathcal{I}}$.

另外设$\widehat{Q}^{(l)}$是$\widehat{Q}$的满子图: $\widehat{Q}_0^{(l)}=\{(i,j)|1\leq i\leq n,-l\leq j\leq l\}$. 且设$\widehat{\mathcal{I}}_l=\widehat{\mathcal{I}}\bigcap K\widehat{Q}^{(l)}$, 容易知道$\widehat{\mathcal{I}}=\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}^+}\widehat{\mathcal{I}}_l$.

下面我们要证明有$K-$代数的同构$\widehat{A}\cong K\widehat{Q}/\widehat{\mathcal{I}}$. 我们需要下述引理:

引理 3.5: 设A是K上 的mononial代 数, $Q,\mathcal{I}$是A对 应 的 底 图 和 可 容 理 想, Γ是A的$K-$ 路基, $\widehat{A}$是A的重复代数, 则对任意的$\alpha,\gamma\in\Gamma$,任意的$\beta,\beta'\in\Gamma$, $i,j\in\mathbb{Z}$, 有

$$M^{(j)}(\alpha)N^{(j)}(f_\beta)M^{(j+1)}(\gamma)=\begin{cases} N^{(j)}(f_\tau), & \text{存在}\tau\in\Gamma\text{ 使得}\beta=\gamma\tau\alpha;\\ 0, & \text{其他情况}.\end{cases}$$

$$N^{(i)}(f_\beta)N^{(j)}(f_{\beta'})=0$$

这里f_β是$\beta\in\Gamma$的对偶基里对应的映射, $M^{(j)}(\alpha)\in\widehat{A}$表示第$(j,j)$个位置为$\alpha$, 其余位置0的矩阵, $N^{(j)}(f_\beta)\in\widehat{A}$表示第$(j,j+1)$个位置为$f_\beta$, 其余位置0的矩阵.

证明: 显然可得$M^{(j)}(\alpha)N^{(j)}(f_\beta)M^{(j+1)}(\gamma)=N^{(j)}(\alpha f_\beta\gamma)$.

若存在$\tau\in\Gamma$使得$\beta=\gamma\tau\alpha$, 则由A是monomial代数可知τ是唯一的, 且有

$$(\alpha f_\beta\gamma)(\sum_{\sigma\in\Gamma}k_\sigma\sigma)=f_\tau(\sum_{\sigma\in\Gamma}k_\sigma\gamma\sigma\alpha)=k_\tau=f_\tau(\sum_{\sigma\in\Gamma}k_\sigma\sigma).$$

由$x\in A$的任意性, 有$\alpha f_\beta\gamma=f_\tau$, 从而$M^{(j)}(\alpha)N^{(j)}(f_\beta)M^{(j+1)}(\gamma)=N^{(j)}(f_\tau)$.

若对任意的$\tau\in\Gamma$使得$\beta\neq\gamma\tau\alpha$, 则$f_\beta(\gamma\tau\alpha)=0$, 由此可知$(\alpha f_\beta\gamma)(\sum\limits_{\sigma\in\Gamma}k_\sigma\sigma)=0$, $\alpha f_\beta\gamma=0$, 从而$M^{(j)}(\alpha)N^{(j)}(f_\beta)M^{(j+1)}(\gamma)=0$.

最后一个式子由矩阵乘法的定义容易知道. □

引理 3.6: 设A是K上的mononial代数, 则$\widehat{A}_l\cong K\widehat{Q}^{(l)}/\widehat{\mathcal{I}}_l$.

证明: 设Γ是A的$K-$路基.

首先, $\{e_i^{(j)}|1\leq i\leq n,-l\leq j\leq l\}$是$\widehat{A}_l$上的一个完备的本原正交幂等元集,且由

$$\mathrm{rad}\widehat{A}_l=\begin{pmatrix}\ddots & \ddots &&&&&&&\\ & 0 & 0 &&&&&&\\ && \mathrm{rad}A_{-l} & \mathrm{D}A_{-l} &&&&&\\ &&& \ddots & \ddots &&&&\\ &&&& \ddots & \mathrm{D}A_{l-1} &&&\\ &&&&& \mathrm{rad}A_l & 0 &&\\ &&&&&& 0 & \ddots &\\ &&&&&&& \ddots &\end{pmatrix}$$

计算可得: $1\leq i,k\leq n$, $-l\leq j,h\leq l$,

$$\dim_K e_i^{(j)}(\mathrm{rad}\widehat{A}_l/\mathrm{rad}^2\widehat{A}_l)e_k^{(h)}=\begin{cases}0, & h\neq j,j+1;\\ \dim_K e_i\mathrm{rad}A/\mathrm{rad}^2Ae_k, & h=j;\\ \dim_K e_i(\mathrm{D}A/(\mathrm{rad}_A(\mathrm{D}A)+\mathrm{rad}(\mathrm{D}A)_A))e_k, & h=j+1.\end{cases}$$

由推论3.4, $\dim_K e_i(\mathrm{D}A/(\mathrm{rad}_A(\mathrm{D}A)+\mathrm{rad}(\mathrm{D}A)_A))e_k=\#\{\gamma:k\to i\in\Gamma$是局部最长路$\}$, 从而可知$\widehat{Q}^{(l)}$是$\widehat{A}_l$的底图.

由于$\widehat{Q}^{(l)}$是$\widehat{A}_l$的底图, 从而我们有一个自然的满的$K-$代数同态$\varphi:K\widehat{Q}^{(l)}\to\widehat{A}_l$. 对任意$\alpha,\beta\in\Gamma$, $j\in\mathbb{Z}$, 令$M^{(j)}(\alpha),N^{(j)}(f_\beta)\in\widehat{A}$为上述引理定义的矩阵. 对$Q$上的路$\rho$, $-l\leq j\leq l$, $\varphi(\rho^{(j)})=M^{(j)}(\rho)$; 而对$Q$上的局部最长路$\beta$, $-l\leq j\leq l-1$, $\varphi(f_\beta^{(j)})=N^{(j)}(f_\beta)$, 其中$f_\beta\in\mathrm{D}A$是$\beta$对应的对偶映射. 由引理3.5, 通过$\varphi$, 对$-l\leq j\leq l$, 在$\widehat{A}_l$中的上述三种关系成立, 即$\widehat{\mathcal{I}}_l\subset\mathrm{Ker}\varphi$, 所以诱导满同态$\overline{\varphi}:K\widehat{Q}^{(l)}/\widehat{\mathcal{I}}_l\to\widehat{A}_l$.

我们只需证明$\dim_K K\widehat{Q}^{(l)}/\widehat{\mathcal{I}}_l\leq\dim_K\widehat{A}_l=(4l-1)\dim_K A$即可知道$\varphi$是双射,从而是同构. 事实上, 由于$\widehat{I}_l$只由零关系和相等关系生成, 则可以从$\widehat{Q}^{(l)}$的路中取出$K\widehat{Q}^{(l)}/\widehat{I}_l$的一个基. 假设$\gamma$ 是$\widehat{Q}^{(l)}$ 上的一条路, 且$0\neq\overline{\gamma}\in K\widehat{Q}^{(l)}/\widehat{\mathcal{I}}_l$, 若对任意的$Q$上的局部最长路$\beta$和$-l\leq j\leq l-1$, $f_\beta^{(j)}$都不是γ的一部分, 则γ是某个$Q^{(l)}$上的路, 则存在Q上的路ρ使得$\gamma=\rho^{(j)}$; 若存在Q上的局部最长路β和$-l\leq j\leq l-1$, 使得$f_\beta^{(j)}$是γ的一部分, 则由于排他关系可知γ当且仅当通过一个$f_\beta^{(j)}$, 且由于长度关系和排他关系, 存在$\alpha,\tau,\sigma\in\Gamma$, 使得$\beta=\alpha\tau\sigma$, $\gamma=\sigma^{(j)}f_\beta^{(j)}\alpha^{(j+1)}$, 则通过

计算可以得到$\varphi(\gamma)=\varphi(\sigma^{(j)}f_{\beta}^{(j)}\alpha^{(j+1)})=\varphi(\sigma^{(j)})\varphi(f_{\beta}^{(j)})\varphi(\alpha^{(j+1)})=N(f_{\tau})^{(j)}$, 其中$f_{\tau}\in \mathrm{D}A$是$\tau$对应的对偶映射.

从而我们通过φ建立集合的映射$\{\gamma|\gamma$是$\widehat{Q}^{(l)}$上的路, 且$\gamma\notin\widehat{I}_l\}\to\{\varphi(\rho^{(j)}),M_{\rho}^{k}|\rho\in\Gamma,-l\leq j\leq l,-l\leq k\leq l-1\}$, 且当$\varphi(\gamma_1)=\varphi(\gamma_2)$, 则或存在$-l\leq j\leq l$使得$\gamma_1,\gamma_2$同时为$Q^{(l)}$上的路, 或者存在$Q$上的局部最长路$\beta_1=\alpha_1\tau_1\sigma_1,\beta_2=\alpha_2\tau_2\sigma_2$和$-l\leq j,k\leq l-1$, 使得$\gamma_1=\sigma_1^{(j)}f_{\beta_1}^{(j)}\alpha_1^{(j+1)}$, $\gamma_2=\sigma_2^{(k)}f_{\beta_2}^{(k)}\alpha_2^{(k+1)}$, 则有$M_{\tau_1}^{(j)}=M_{\tau_2}^{(k)}$, 由此可知$j=k$且$f_{\tau_1}=f_{\tau_2}$, 即$\tau_1=\tau_2$. 由上以及分享关系可知$\overline{\varphi}:\{\overline{\gamma}\in K\widehat{Q}^{(l)}/\widehat{I}_l|\gamma$是$\widehat{Q}^{(l)}$上的路, 且$\gamma\notin\widehat{\mathcal{I}}_l\}\to\{\varphi(\rho^{(j)}),M(f_{\rho})^{(k)}|\rho\in\Gamma,-l\leq j\leq l,-l\leq k\leq l-1\}$ 是单射.

由于$K\widehat{Q}^{(l)}/\widehat{\mathcal{I}}_l$的一组基可从集合$\{\overline{\gamma}\in K\widehat{Q}^{(l)}/\widehat{\mathcal{I}}_l|\gamma$是$\widehat{Q}^{(l)}$上的路, 且$\gamma\notin\widehat{\mathcal{I}}_l\}$取得, 则$\dim_K K\widehat{Q}^{(l)}/\widehat{\mathcal{I}}_l\leq(4l-1)\#\Gamma=(4l-1)\dim_K A$, 从而结论成立. □

定理 3.7: 设A是K上的mononial代数, 则$\widehat{A}\cong K\widehat{Q}/\widehat{\mathcal{I}}$.

证明: 首先, 由于对任意$l\in\mathbb{N}^{+}$, $\varphi:K\widehat{Q}_l\to\widehat{A}_l$为满同态, 我们有$K-$代数的满同态$\varphi:K\widehat{Q}\to\widehat{A}$, 而对任意的$l\in\mathbb{Z}$, 有$\widehat{\mathcal{I}}_l\subset\mathrm{Ker}\varphi$, 从而有$\widehat{\mathcal{I}}=\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}^{+}}\widehat{\mathcal{I}}_l\subset\mathrm{Ker}\varphi$, 从而$\varphi$诱导$K-$代数的满同态$\overline{\varphi}:K\widehat{Q}/\widehat{\mathcal{I}}\to\widehat{A}$, 而$\overline{\varphi}$ 诱导同构$K\widehat{Q}^{(l)}/\widehat{\mathcal{I}}_l\cong\widehat{A}_l$, 且$K\widehat{Q}/\widehat{\mathcal{I}}=\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}^{+}}K\widehat{Q}^{(l)}/\widehat{\mathcal{I}}_l$, $\widehat{A}=\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}^{+}}\widehat{A}_l$, 从而$\overline{\varphi}$ 是双射, 从而是$K-$代数同构. □

第四章　Monomial代数的平凡扩张代数

§ 4.1　Monomial代数的平凡扩张代数的底图和关系

在这一节中，设A是域K上含单位元1的有限维monomial代数, Q是A对应的底图, I 是A对应的可容理想, 即有$K-$代数同构$A \cong KQ/\mathcal{I}$, 同时设$\{e_i\}_{i=1}^{n}$是A上的一个完备的本原正交幂等元集, Γ是A的$K-$路基, Q_1表示Q上的箭头, P表示Q上所有的路, TA是A是平凡扩张.

首先设箭图$\widetilde{Q} = (\widetilde{Q}_0, \widetilde{Q}_1, \mathrm{s}, \mathrm{t})$: $\widetilde{Q}_0 = Q_0$, $\#\{\gamma : i \to j \in \widetilde{Q}_1\} = \#\{\gamma : i \to j \in Q_1\} + \#\{\gamma : j \to i \in \Gamma$ 是局部最长路$\}$. 进一步设f_β为局部最长路β所决定的$\widetilde{Q}$上的路, 在不混肴的情况下, 它也表示A的$K-$路基Γ的对偶基中, β所对应的映射.

容易看到Q是$\widetilde{Q}$的子图.

下面我们利用$\widetilde{Q}$上的关系定义$K\widetilde{Q}$的一个可容理想:

(1) 排他关系: 若$\beta, \beta' \in \Gamma$是局部最长路, 其中$\beta \neq \beta'$, 则

- 对$\alpha \in \Gamma$, 其中α不是β的一部分(即不存在$\gamma, \tau \in \Gamma$使得$\beta = \gamma\alpha\tau$), 那么有
$$\alpha f_\beta = f_\beta \alpha = 0,$$
- 对任意$\sigma \in \Gamma$有
$$f_\beta \sigma f_{\beta'} = 0.$$

(2) 长度关系: 若$\beta \in \Gamma$是局部最长路, 长度为l, 令$J_\beta = \langle \alpha | \alpha \in Q_1$是$\beta$的一部分$\rangle + \langle f_\beta \rangle$,则有
$$J_\beta^{l+2} = 0.$$

(3) 分享关系: 若$\beta, \beta' \in \Gamma$是局部最长路, $\alpha \in \Gamma$, 其中$\beta \neq \beta'$, 且α同时是β和β'的一部分(即存在$\gamma, \tau, \gamma', \tau' \in \Gamma$使得$\beta = \gamma\alpha\tau, \beta' = \gamma'\alpha\tau'$), 那么有

$$\tau f_\beta \gamma = \tau' f_{\beta'} \gamma'.$$

设由$\mathcal{I} \subset K\widetilde{Q}$和上述三种关系生成在$K\widetilde{Q}$的可容理想记为$\widetilde{\mathcal{I}}$.

下面我们要证明$\mathrm{T}A \simeq K\widetilde{Q}/\widetilde{\mathcal{I}}$. 首先, 由$\mathrm{T}A$上的乘法, 我们有下述引理:

引理 4.1: 设A是K上的mononial代数, $Q, \mathcal{I}$是A对应的底图和可容理想, Γ是A的$K-$路基, $\mathrm{T}A = A \oplus \mathrm{D}A$是$A$的平凡扩张代数, 则对任意的$\alpha, \gamma \in \Gamma$,任意的$\beta, \beta' \in \Gamma$, 有

$$(\alpha, 0)(0, f_\beta)(\gamma, 0) = \begin{cases} (0, f_\tau), & \text{存在}\tau \in \Gamma\text{使得}\beta = \gamma\tau\alpha; \\ 0, & \text{其他情况}. \end{cases}$$

$$(0, f_\beta)(0, f_{\beta'}) = 0$$

这里f_β是$\beta \in \Gamma$的对偶基里对应的映射.

证明: 类似引理3.5. □

定理 4.2: 设A是K上的mononial代数, 则$\mathrm{T}A \cong K\widetilde{Q}/\widetilde{\mathcal{I}}$.

证明: 首先, $\{(e_i, 0)\}_{i=1}^n$是$\mathrm{T}A$上的一个完备的本原正交幂等元集, 且由$\mathrm{rad}\mathrm{T}A = \mathrm{rad}A \oplus \mathrm{D}A$可得$\mathrm{rad}^2\mathrm{T}A = (\mathrm{rad}\mathrm{T}A)^2 = (\mathrm{rad}A \oplus \mathrm{D}A)^2 = \mathrm{rad}^2 A \oplus (\mathrm{rad}(\mathrm{D}A)_A + \mathrm{rad}_A(\mathrm{D}A))$, 从而有

$$\mathrm{rad}\mathrm{T}A/\mathrm{rad}^2\mathrm{T}A = (\mathrm{rad}A/\mathrm{rad}^2 A) \oplus (\mathrm{D}A/(\mathrm{rad}(\mathrm{D}A)_A + \mathrm{rad}_A(\mathrm{D}A))),$$

进一步, 由推论3.4, 对$1 \leq i, j \leq n$,

$$\dim_K (e_i, 0)\mathrm{rad}\mathrm{T}A/\mathrm{rad}^2\mathrm{T}A(e_j, 0) = \dim_K e_i \mathrm{rad}A/\mathrm{rad}^2 A e_j + \dim_K e_i(\mathrm{D}A/(\mathrm{rad}_A(\mathrm{D}A) + \mathrm{rad}(\mathrm{D}A)_A))e_j = \#\{\gamma : i \to j \in Q_1\} + \#\{\gamma : j \to i \in \Gamma \text{ 是局部最长路}\}.$$ □

从而可知$\widetilde{Q}$是$\mathrm{T}A$的底图.

由于$\widetilde{Q}$是$\mathrm{T}A$的底图, 从而我们有一个自然的满的$K-$代数态射$\varphi: K\widetilde{Q} \to \mathrm{T}A$, 对$\alpha \in Q_1$, $\varphi(\alpha) = (\alpha, 0)$, 对$Q$局部上的局部最长路$\beta$, $\varphi(f_\beta) = (0, f_\beta)$, 从而由引理4.1, 我们有$\widetilde{\mathcal{I}} \subset \mathrm{Ker}\varphi$, 那么有满的$K-$代数同态$\overline{\varphi}: K\widetilde{Q}/\widetilde{\mathcal{I}} \to \mathrm{T}A$.

为了证明$\overline{\varphi}$是同构, 只需要证明$\dim_K K\widetilde{Q}/\widetilde{\mathcal{I}} \leq \dim_K \mathrm{T}A$.

实际上, 假设Γ是A的$K-$路基, ρ是$\widetilde{Q}$上的一条有限长度的路, 且$\overline{\rho}$在$K\widetilde{Q}/\widetilde{\mathcal{I}}$中不为0.

若对任意的局部最长路$\beta \in \Gamma$, f_β都不是ρ的一部分, 那么存在Q 上的路σ, 使得$\rho = \sigma$, 由于$\rho \notin \mathcal{I}$, 可得$\rho \in \Gamma$, $\varphi(\rho) = (\rho, 0)$.

若存在局部最长路$\beta \in \Gamma$使得f_β是ρ的一部分, 由于$\overline{\rho} \neq 0$, 从而可知有且仅有一条f_β是ρ 的一部分, 即存在$\alpha, \gamma \in \Gamma$, 使得$\rho = \alpha f_\beta \gamma \notin \widetilde{\mathcal{I}}$. 实际上, 如果$\overline{\alpha f_\beta \gamma f_{\beta'} \delta} \neq 0$, 其中$\beta, \beta'$ 是局部最长路, 则$\overline{f_\beta \gamma f_{\beta'}} \neq 0$, 这与排他关系矛盾. 进一步由排他关系和长度关系, 存在$\sigma \in \Gamma$使得$\beta = \gamma\sigma\alpha$, 则$\varphi(\rho) = (0, \alpha f_\beta \gamma) = (0, f_\sigma)$.

从而φ建立映射$\{\rho | \rho$是$\widetilde{Q}$上的路, 且$\rho \notin \widetilde{\mathcal{I}}\} \to \{(\sigma, 0), (0, f_\sigma) | \sigma \in \Gamma\}$, 且当$\varphi(\rho_1) = \varphi(\rho_2)$时, 则$\rho_1, \rho_2$同时为$Q$上的路, 或同时不为$Q$上的路: 若$\rho_1, \rho_2$同时为$Q$上的路, 则$(\rho_1, 0) = (\rho_2, 0)$, 则在$A$中$\rho_1 = \rho_2$, 而$\rho_1, \rho_2 \in \Gamma$, 可知$\rho_1, \rho_2$是$Q$上的同一条路; 若$\rho_1, \rho_2$同时为$Q$ 上的路, 则存在局部最长路$\beta_1 = \gamma_1\sigma_1\alpha_1, \beta_2 = \gamma_2\sigma_2\alpha_2$, $\varphi(\rho_1) = (0, f_{\sigma_1}) = \varphi(\rho_2) = (0, f_{\sigma_2})$, 从而$\sigma_1 = \sigma_2$. 由上以及分享关系可知$\overline{\varphi}: \{\overline{\rho} \in K\widetilde{Q}/\widetilde{\mathcal{I}} | \rho$ 是$\widetilde{Q}$上的路, 且$\rho \notin \widetilde{\mathcal{I}}\} \to \{(\sigma, 0), (0, f_\sigma) | \sigma \in \Gamma\}$是单射.

而$\widetilde{\mathcal{I}}$是由零关系和相等关系生成的, 那么$K\widetilde{Q}/\widetilde{\mathcal{I}}$可取一组$K-$基$\widetilde{\Gamma}$, 其元素都为$\widetilde{Q}$上有限长度的路. 由上我们有$\dim_K K\widetilde{Q}/\widetilde{\mathcal{I}} = \#\widetilde{\Gamma} \leq 2\#\Gamma = \dim_K \mathrm{T}A$.

由上述证明过程中关于ρ的选取, 我们可以得到下列推论:

推论 4.3: 设A是K上 的mononial代数, $Q, \mathcal{I}$是A对应的底图和可容理想, Γ是A的$K-$路基, $\mathrm{T}A$是A的平凡扩张代数, $\widetilde{Q}, \widetilde{\mathcal{I}}$是$\mathrm{T}A$ 对应的底图和可容理想, 则集合$\Gamma \bigcup \{\tau f_\beta \sigma | \beta$为$(Q, \mathcal{I})$上局部最长路, f_β为β 对应生成的箭, $\tau, \sigma \in \Gamma$而且存在$\gamma \in \Gamma$使得$\beta = \sigma\gamma\tau\}$中的路在$\mathrm{T}A$中都不为0, 是所有在$\mathrm{T}A$ 中不为0的路.

§4.2　Monomial代数的平凡扩张代数的充要条件

这一节我们要给出Monomial代数的平凡扩张代数的一个充要条件. 在这之前, 我们需要几个容易看出的定义. 对任意箭图Q上的路ρ, 我们总用$l(\rho)$表示ρ 的长度. 设$C=(C_0,C_1;s,t)$是一个圈,则我们称$\#C_0$ 是C 的周长, 在无混淆的情况下, 记为$l(C)$. 对圈C上的路ρ, 若$l(\rho)\le l(C)$, 则存在C 上唯一的路ρ^C使得$l(\rho^C)\le l(C)$, 且$\mathrm{s}(\rho)=\mathrm{t}(\rho^C)$, $\mathrm{t}(\rho)=\mathrm{s}(\rho^C)$,称$\rho^C$为$\rho$在$C$ 上的补路. 容易得到$l(\rho\rho^C)=l(\rho^C\rho)=l(C)$.

为了方便, 我们有时会用圈来表示箭图, 有时表示箭图中的某一条路, 但不会引起混淆.

定理 4.4: 设A是K上的基代数, $Q,\mathcal{I}$是A对应的底图和可容理想, 则A是monomial代数的平凡扩张代数当且仅当I由零关系和相等关系生成, 且存在Q的子图$C_1,\cdots,C_k$, 其中C_i为圈,满足

(1) $C_1\bigcup\cdots\bigcup C_k=Q$;

(2) 对任意C_i, 存在箭$\alpha_i\in P_i\setminus\bigcup\limits_{j\neq i}P_j$, 其中$P_i$为$C_i$上所有的路;

(3) 对任意Q上的路ρ, 在A中有$\rho=0$当且仅当下列条件之一成立

　i 对任意的$1\le i\le k$, $\rho\notin P_i$;

　ii 存在$1\le i\le k$, 使得$\rho\in P_i$, 但$l(\rho)>l_i$, 其中l_i为C_i的周长;

(4) 对两条不同的路$\rho_1\in P_i$, $\rho_2\in P_j$, 在A中不为0且有$\rho_1=\rho_2$当且仅当存在$\rho\in P_i\bigcap P_j$, $l(\rho)\le l_i,l_j$, 使得$\rho_1=\rho^{C_i},\rho_2=\rho^{C_j}$, 其中$\rho^{C_i},\rho^{C_j}$分别是$\rho$在$C_i$,$C_j$中的补路.

证明: 必要性: 假设B为K上的monomial代数, $Q',\mathcal{I}'$是B对应的底图和可容理想, 且$\mathrm{T}B=A$. 进一步, 假设$\beta_1,\cdots,\beta_k$是(Q',I')中的所有的局部最长路, Γ为B的$K-$路基. 由$\mathrm{T}B=A$, 可知$Q,\mathcal{I}$是$\mathrm{T}B$对应的底图和可容理想, 从而由定理4.2知每一条局部最长路β_i对应Q上的一条箭α_i 使得$\mathrm{s}(\beta_i)=\mathrm{t}(\alpha_i),\mathrm{t}(\beta_i)=\mathrm{s}(\alpha_i)$, 从而$\alpha_i$与$\beta_i$构成一个圈, 记为$C_i$. 由定理4.2知道$\mathcal{I}$由零关系和相等关系生成, 下面验证$C_i$ 满足上述的条件.

首先, 由于对在Q'中的每条箭都属于某一条局部最长路, 而且对任意的$\alpha_i \in Q_1 - Q'_1 = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$, 显然$\alpha_i$ 在C_i, 从而$C_1 \bigcup \cdots \bigcup C_k = Q$. 且对任意$C_i, \alpha_i \in P_i \setminus \bigcup_{j \neq i} P_j$, 其中$P_i$为$C_i$上所有的路.

接着我们要证明: $\{\rho | \rho$为Q上的路, 且存在$1 \leq i \leq k$, 使得$\rho \in P_i, l(\rho) \leq l_i\} = \Gamma \bigcup \{\tau\alpha_i\sigma | 1 \leq i \leq k, \tau, \sigma \in \Gamma$, 而且存在$\gamma \in \Gamma$ 使得$\beta = \sigma\gamma\tau\}$. 事实上, 我们假设$S_1 =$左边, $S_2 =$右边, 对$\rho \in S_2$, 若$\rho \in \Gamma$, 则ρ在B上不为0, 总存在局部最长路使得ρ为其的一部分, 从而$\rho \in S_1$, 若$\rho \notin \Gamma$, 则存在$1 \leq i \leq k$, $\tau, \sigma, \gamma \in \Gamma$ 使得$\rho = \tau\alpha_i\sigma$,$\beta = \sigma\gamma\tau$, 从而$\rho \in P_i, l(\rho) \leq l(\beta_i) + 1 = l_i$, 从而$S_2 \subset S_1$; 另一方面, 对$\rho \in S_1$, 即存在$1 \leq i \leq k$, 使得$\rho \in P_i, l(\rho) \leq l_i$, 若$\rho$都是由$Q'_1$中的箭组成, 则$\rho$是$\beta_i$的一部分, 自然有$\rho \in \Gamma$, 若$\rho = \tau\alpha_i\sigma$, 则由于$l(\rho) \leq l_i$可知$\tau, \sigma$为$\beta_i$的一部分, 从而$\tau, \sigma \in \Gamma$, 且$\mathrm{s}(\sigma) = \mathrm{t}(\alpha_i) = \mathrm{s}(\beta_i), \mathrm{t}(\tau) = \mathrm{s}(\alpha_i) = \mathrm{t}(\beta_i)$, 同时$l(\tau) + l(\sigma) \leq l_i - 1 = l(\beta_i)$, 则$\gamma \in \Gamma$ 使得$\beta = \sigma\gamma\tau\}$, 则$\rho \in S_1$, 从而$S_1 \subset S_2$. 再由推论4.3可以得到$Q$上的路$\rho$在$\mathrm{T}B$中不为0的充要条件为存在$1 \leq i \leq k$, 使得$\rho \in P_i, l(\rho) \leq l_i$.

最后, 对任意$1 \leq i, j \leq k$, $\rho \in P_i \bigcap P_j$, $l(\rho) \leq l_i, l_j$, 令$\rho_1 = \rho^{C_i}, \rho_2 = \rho^{C_j}$, 可知$l(\rho_1) \leq l_i, l(\rho_2) \leq l_j$, 则$\rho_1, \rho_2$在$A$中不为0, 且$\alpha_i \notin P_j, \alpha_j \notin P_i$, 从而$\rho$是$\beta_i$和$\beta_j$的公共部分, 假设$\beta_i = \tau_1\rho\sigma_1$, $\beta_j = \tau_2\rho\sigma_2$, 则$\rho_1 = \sigma_1\alpha_i\tau_1, \rho_2 = \sigma_2\alpha_i\tau_2$, 从而由分享关系可知$\rho_1 = \rho_2$. 反之, 若对两条不同的路$\rho_1 \in P_i$, $\rho_2 \in P_j$, 在$\mathrm{T}B$中不为0且有$\rho_1 = \rho_2$, 则$l(\rho_1) \leq l_i, l(\rho_2) \leq l_j, \mathrm{s}(\rho_1) = \mathrm{s}(\rho_2), \mathrm{t}(\rho_1) = \mathrm{t}(\rho_2)$, 进一步有$\mathrm{s}(\rho_1^{C_i}) = \mathrm{t}(\rho_1) = \mathrm{t}(\rho_2) = \mathrm{s}(\rho_2^{C_j})$, $\mathrm{t}(\rho_1^{C_i}) = \mathrm{s}(\rho_1) = \mathrm{s}(\rho_2) = \mathrm{t}(\rho_2^{C_j})$, $\rho_1^{C_i}, \rho_2^{C_j}$在$\mathrm{T}B$都不为0, 若$\rho_1^{C_i} = \rho_2^{C_j}$, 令$\rho = \rho_1^{C_i} = \rho_2^{C_j}$即可. 下面验证$\rho_1^{C_i} = \rho_2^{C_j}$: 若$\rho_2^{C_j} \in P_i$, 由于$\rho_1^{C_i}, \rho_2^{C_j}$有相同的起点和终点, 且都不为0, 容易得到$\rho_1^{C_i} = \rho_2^{C_j}$; 若$\rho_2^{C_j} \notin P_i$, 则圈$\rho_1\rho_2^{C_j} \notin P_i$, 但$\rho_1\rho_2^{C_j} = \rho_1\rho_1^{C_i}$在$\mathrm{T}B$中不为0, 从而存在$1 \leq h \leq k, h \neq i$使得$\rho_1\rho_2^{C_j} \in P_h$, 由于$\rho_1\rho_2^{C_j}$ 为圈, 从而C_h的箭都在$\rho_1\rho_2^{C_j}$中, 而$\rho_1 \in P_i, \rho_2^{C_j} \in P_j$, 从而$C_h$的箭都在$P_i \bigcup P_j$中, 可知$h = j$, 则$\rho_1 \in P_j$, 同样由于$\rho_1, \rho_2$有相同的起点和终点, 且都不为0, 容易得到$\rho_1 = \rho_2$, 这与假设矛盾.

充分性: 假设基代数A的底图和可容理想$Q, \mathcal{I}$满足上述条件, 则令$Q' = Q - \{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$, $\mathcal{I}' = KQ' \bigcap \mathcal{I}$, 即代数$B = KQ'/\mathcal{I}'$是$A$的子代数. 先说明$B$是monomial代数, 即$\mathcal{I}$由零关系生成: 如果在$B$中有两条不同的路$\rho_1 \in P_i$,

$\rho_2 \in P_j$, 在B中不为0且有$\rho_1 = \rho_2$, 由于B 是A的子代数, 那么存在$\rho \in P_i \bigcap P_j$, $l(\rho) \leq l_i, l_j$, 使得$\rho_1 = \rho^{C_i}, \rho_2 = \rho^{C_j}$, 可知$\alpha_i, \alpha_j$不在$\rho$上, 从而$\alpha_i$在$\rho_1$上, α_j在ρ_2 上, 那么ρ_1, ρ_2都不在Q'上, 从而矛盾.

下面证明$\mathrm{T}B \cong A$. 首先对任意的$1 \leq i \leq k$, 取$\beta_i = \alpha_i^{C_i}$为α_i在C_i中的补路, 从而有$\mathrm{s}(\beta_i) = \mathrm{t}(\alpha_i), \mathrm{t}(\beta_i) = \mathrm{s}(\alpha_i)$, 则$\{\beta_1, \cdots, \beta_k\}$是$(Q', \mathcal{I}')$上所有的局部最长路: 显然对任意的$1 \leq i \leq k$, β_i 是Q'上的路, 而且对任意$\gamma \in Q'_1$, 如果$t(\gamma) \neq s(\beta_i)$, 显然$\gamma\beta_i = 0$, 当$t(\gamma) = s(\beta_i)$且$\gamma \notin P_i$时, 则$\gamma\beta_i \notin P_i, \gamma\beta_i = 0$, 而当$t(\gamma) = s(\beta_i)$且$\gamma \in P_i$, 由于$C_i$是圈, 圈里同一起点的箭是同一条箭, 则$\gamma = \alpha_i$, 与$\alpha_i \notin Q'_1$矛盾, 从而可知$\beta_i$是$(Q', \mathcal{I}')$上的局部最长路; 设$(Q', \mathcal{I}')$的一条局部最长路为$\beta$, 由于$\beta \neq 0$, 则存在$1 \leq i \leq k$ 使得$\beta \in P_i$, 且β不通过α_i, 从而可知β是β_i的一部分,由于β, β_i是局部最长路, 则$\beta = \beta_i$. 进而, 由定理4.2, B的平凡扩张代数$\mathrm{T}B$的底图为Q, 即与A的底图一致, 假设$\mathrm{T}B$ 的可容理想为$\mathcal{J}$, 即通过$\mathcal{I}'$和三种关系生成的理想. 根据必要性的证明, $\mathcal{I}$和$\mathcal{J}$都是由零关系和相等关系生成, 取圈$C_1, \cdots, C_k$, 且都是满足条件(3), (4), 从而$\mathcal{I}$由同样的关系生成, 则有$\mathcal{I} = \mathcal{J}$, 从而$A \cong KQ/\mathcal{I} = KQ/\mathcal{J} \cong \mathrm{T}B$. □

在定理中, 我们可以对条件(4)做一个简单弱化, 即只需要条件(4)的充分性, 这样的话, 判断monomial代数的平凡扩张代数会更方便.

推论 4.5: 设A是K上的基代数, $Q, \mathcal{I}$是A对应的底图和可容理想, 则A是monomial代数的平凡扩张代数当且仅当$\mathcal{I}$由零关系和相等关系生成, 且存在Q 的子图$C_1, \cdots, C_k$, 其中C_i为圈,满足

(1) $C_1 \bigcup \cdots \bigcup C_k = Q$;

(2) 对任意C_i, 存在箭$\alpha_i \in P_i \setminus \bigcup_{j \neq i} P_j$, 其中$P_i$为$C_i$上所有的路;

(3) 对任意Q上的路ρ, 在A中有$\rho = 0$当且仅当下列条件之一成立

  i 对任意的$1 \leq i \leq k$, $\rho \notin P_i$;

  ii 存在$1 \leq i \leq k$, 使得$\rho \in P_i$, 但$l(\rho) > l_i$, 其中l_i为C_i的周长;

(4) 若$\rho \in P_i \bigcap P_j$, $l(\rho) \leq l_i, l_j$, 则$\rho^{C_i} = \rho^{C_j}$, 其中ρ^{C_i}, ρ^{C_j}分别是ρ 在C_i,C_j 中的补路.

证明: 只要证明充分性, 根据定理4.4, 只要证明定理4.4中的条件(4)即可. 事实上, 证明与定理4.4 中必要性条件4的证明的思路一致. 如果两条不同的路$\rho_1 \in P_i$, $\rho_2 \in P_j$, 在A中不为0且有$\rho_1 = \rho_2$, 则$l(\rho_1) \leq l_i, l(\rho_2) \leq l_j$, $\mathrm{s}(\rho_1) = \mathrm{s}(\rho_2), \mathrm{t}(\rho_1) = \mathrm{t}(\rho_2)$, 进一步有$\mathrm{s}(\rho_1^{C_i}) = \mathrm{t}(\rho_1) = \mathrm{t}(\rho_2) = \mathrm{s}(\rho_2^{C_j}), \mathrm{t}(\rho_1^{C_i}) = \mathrm{s}(\rho_1) = \mathrm{s}(\rho_2) = \mathrm{t}(\rho_2^{C_j})$, $\rho_1^{C_i}, \rho_2^{C_j}$在$A$都不为0, 若$\rho_1^{C_i} = \rho_2^{C_j}$, 令$\rho = \rho_1^{C_i} = \rho_2^{C_j}$即可. 下面验证$\rho_1^{C_i} = \rho_2^{C_j}$: 若$\rho_2^{C_j} \in P_i$, 由于$\rho_1^{C_i}, \rho_2^{C_j}$有相同的起点和终点, 且都不为0, 容易得到$\rho_1^{C_i} = \rho_2^{C_j}$; 若$\rho_2^{C_j} \notin P_i$, 则圈$\rho_1\rho_2^{C_j} \notin P_i$, 但$\rho_1\rho_2^{C_j} = \rho_1\rho_1^{C_i}$在$A$中不为0, 从而存在$1 \leq h \leq k, h \neq i$使得$\rho_1\rho_2^{C_j} \in P_h$, 由于$\rho_1\rho_2^{C_j}$为圈, 从而$C_h$的箭都在$\rho_1\rho_2^{C_j}$ 中, 而$\rho_1 \in P_i, \rho_2^{C_j} \in P_j$, 从而$C_h$ 的箭都在$P_i \bigcup P_j$中, 可知$h = j$, 则$\rho_1 \in P_j$, 同样由于ρ_1, ρ_2有相同的起点和终点, 且都不为0, 容易得到$\rho_1 = \rho_2$, 这与假设矛盾. □

下面我们想说明圈$C_1, \cdots, C_k$的唯一性, 即它们由monomial代数的平凡扩张代数唯一决定.

推论 4.6: 设A是K上monomial代数的平凡扩张代数, $Q, \mathcal{I}$是A对应的底图和可容理想, 则满足定理5.1中的条件的$C_1, \cdots, C_k$在不考虑顺序下是唯一存在的.

证明: 若还有另外的一组圈$S_1, \cdots, S_l$满足定理4.4中的条件, 则对S_1, 取S_1的路ρ使得$l(\rho) = l(S_1)$, 则$\rho \neq 0$, 且ρ过S_1 上的所有的箭. 对$1 \leq i \leq k$, 设P_i是圈C_i上的所有的路, 则根据条件(3), 存在某个$1 \leq j_1 \leq k$使得$\rho \in P_{j_1}$, 则S_1的箭都在C_{j_1} 上, 同时S_1和C_{j_1}都是圈, 从而$S_1 = C_{j_1}$. 同理存在$1 \leq j_2, \cdots, j_l \leq k$, 使得$S_2 = C_{j_2}, \cdots, S_l = C_{j_l}$, 则$\{S_1, \cdots, S_l\} \subset \{C_1, \cdots, C_k\}$, 同理可证$\{C_1, \cdots, C_k\} \subset \{S_1, \cdots, S_l\}$, 唯一性得证. □

为了方便, 我们把满足定理4.4的圈集$\{C_1, \cdots, C_k\}$称为平凡扩张代数A的完备圈集.

下面的推论给出了以代数A为平凡扩张代数的所有monomial代数的构造和个数的上界.

推论 4.7: 设A是K上monomial代数的平凡扩张代数, $\{C_1, \cdots, C_k\}$是A的完备圈集, Λ_i是C_i上所有的箭, 且令$n_i = \#(\Lambda_i \setminus \bigcup\limits_{j \neq i} \Lambda_j)$, 则以$A$为平凡扩张代数的monomial代数在$K-$代数同构下不超过$\prod\limits_{i=1}^{k} n_i$个.

证明: 在定理4.4的充分性证明中, 对每一个C_i, 都去掉一个$\Lambda_i \setminus \bigcup\limits_{j\neq i}\Lambda_j$的箭头, 可以得到一个monomial代数$B$, 使得$\mathrm{T}B \cong A$. 反之, 对任意一个使得$\mathrm{T}B \cong A$的monomial代数$B$, 根据定理4.4的必要性证明中, 新增加的箭必分别属于其对应的$\Lambda_i \setminus \bigcup\limits_{j\neq i}\Lambda_j$. 从而每一个使得$\mathrm{T}B \cong A$的monomial代数$B$都可以通过对每一个$C_i$, 都去掉一个$\Lambda_i \setminus \bigcup\limits_{j\neq i}\Lambda_j$的箭头得到. □

这一节说明了monomial代数的平凡扩张代数是由某一些自入射的Nakayama代数(由完备圈集中的圈生成的代数)同构条件4(分享关系)粘合生成的代数.

第五章　例子与应用

§ 5.1　例子

例子 5.1.1: 设$A = KQ$, 这里箭图Q如下:

$$\begin{tikzcd} & \overset{1}{\circ} \arrow[d, "\alpha"] & \\ 2\circ & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, "\gamma"] & \circ 4 \end{tikzcd},$$

那么A是monomial代数, 而容易知道A的$K-$路基为$\Gamma = P = \{e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta, \alpha\gamma\}$, 局部最长路集为$\Gamma_3 = \{\alpha\beta, \alpha\gamma\}$, 从而$A$的平凡扩张$\mathrm{T}A$的底图$\widetilde{Q}$如下:

$$\begin{tikzcd} & \overset{1}{\circ} \arrow[d, "\alpha"] & \\ 2\circ \arrow[ur, "\delta"] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\beta"] \arrow[r, "\gamma"'] & \circ 4 \arrow[ul, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

其中$\delta = f_{\alpha\beta}$, $\sigma = f_{\alpha\gamma}$. 由于$\alpha\gamma$不是局部最长路$\alpha\beta$的一部分, $\alpha\beta$不是局部最长路$\alpha\gamma$的一部分, 排他关系要求$\delta\alpha\gamma = \sigma\alpha\beta = 0$; 长度关系要求$\alpha\beta\delta\alpha = \beta\delta\alpha\beta = \delta\alpha\beta\delta = 0$, $\alpha\gamma\sigma\alpha = \gamma\sigma\alpha\gamma = \sigma\alpha\gamma\sigma = 0$; 由于$\alpha$是局部最长路$\alpha\beta$和$\alpha\gamma$的公共部分,从而分享关系要求$\beta\delta = \gamma\sigma$. 而由于$\mathcal{I} = 0$, 从而$\mathrm{T}A$的可容理想为:

$$\widetilde{\mathcal{I}} = \langle \delta\alpha\gamma, \sigma\alpha\beta, \alpha\beta\delta\alpha, \beta\delta\alpha\beta, \delta\alpha\beta\delta, \alpha\gamma\sigma\alpha, \gamma\sigma\alpha\gamma, \sigma\alpha\gamma\sigma, \beta\delta - \gamma\sigma \rangle.$$

而$\mathrm{T}A = K\widetilde{Q}/\widetilde{\mathcal{I}}$的一组由路组成的基为

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta, \alpha\gamma, \delta, \sigma, \delta\alpha, \beta\delta, \sigma\alpha, \delta\alpha\beta, \alpha\beta\delta, \beta\delta\alpha, \sigma\alpha\gamma\}.$$

$\mathrm{T}A$的完备圈集为$\{C_1, C_2\}$, 其中

$$C_1: \begin{tikzcd} & \overset{1}{\circ} \arrow[d, "\alpha"] \\ 2\circ \arrow[ur, "\delta"] & \circ 3 \arrow[l, "\beta"] \end{tikzcd}, \quad C_2: \begin{tikzcd} \overset{1}{\circ} \arrow[d, "\alpha"'] & \\ 3\circ \arrow[r, "\gamma"'] & \circ 4 \arrow[ul, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

从而$\Lambda_1=\{\alpha,\beta,\delta\}$, $\Lambda_2=\{\alpha,\gamma,\sigma\}$, 则以$\mathrm{T}A$为平凡扩张代数的所有monomial代数由下列4个子图生成(可能有同构的情况, 可容理想通过$\widetilde{\mathcal{I}}$生成)

$$\begin{tikzcd} & \overset{1}{\circ} \arrow[d, "\alpha"] & \\ {}_2\circ & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, "\gamma"] & \circ_4 \end{tikzcd} \qquad \mathcal{I}=0,$$

$$\begin{tikzcd} {}_2\circ \arrow[r, "\delta"] & \underset{1}{\circ} \arrow[r, "\alpha"] & \underset{3}{\circ} \arrow[r, "\gamma"] & \circ_4 \end{tikzcd} \ \mathcal{I}=\langle\delta\alpha\gamma\rangle$$

$$\begin{tikzcd} {}_2\circ & \underset{1}{\circ} \arrow[l, "\beta"'] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\alpha"'] & \circ_4 \arrow[l, "\sigma"'] \end{tikzcd} \ \mathcal{I}=\langle\sigma\alpha\beta\rangle$$

$$\begin{tikzcd} {}_2\circ \arrow[r, "\delta"] & \overset{1}{\circ} \arrow[d, "\alpha"] & \circ_4 \arrow[l, "\sigma"'] \\ & \underset{3}{\circ} & \end{tikzcd} \ \mathcal{I}=0,$$

注意到第二个和第三个代数是同构的, 则以$\mathrm{T}A$为平凡扩张代数的所有monomial代数总共有3个.

例子 5.1.2: 设$A=KQ/\mathcal{I}$, 这里箭图Q 如下:

$$\begin{tikzcd} & \overset{1}{\circ} \arrow[dr, "\alpha"] & \\ {}_3\circ \arrow[ur, "\gamma"] & & \circ_2 \arrow[ll, "\beta"] \end{tikzcd}$$

而$\mathcal{I}=\langle\alpha\beta,\beta\gamma,\gamma\alpha\rangle$, 那么$A$是monomial代数, 而容易知道$A$的$K-$路基为$\Gamma=\{e_1,e_2,e_3,\alpha,\beta,\gamma\}$, 局部最长路集为$\Gamma_3=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, 从而$A$的平凡扩张$\mathrm{T}A$的底图$\widetilde{Q}$如下:

$$\begin{tikzcd} & \overset{1}{\circ} \arrow[dr, bend left, "\alpha"] \arrow[dl, bend right, "\delta"'] & \\ {}_3\circ \arrow[ur, bend left, "\gamma"] \arrow[rr, bend right, "\tau"'] & & \circ_2 \arrow[ll, bend right, "\beta"'] \arrow[ul, bend right, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

其中$\sigma=f_\alpha,\tau=f_\beta,\delta=f_\gamma$. 容易看到排他关系要求$\delta\tau=\tau\sigma=\sigma\delta=0$; 长度关系要求$\alpha\sigma\alpha=\sigma\alpha\sigma=\beta\tau\beta=\tau\beta\tau=\gamma\delta\gamma=\delta\gamma\delta=0$; 由于$e_1$是局部最长路$\gamma$ 和α的公共部分,e_2 是局部最长路α和β的公共部分, e_3是局部最长路β和γ的公共部分,

从而分享关系要求$\delta\gamma = \alpha\sigma, \sigma\alpha = \beta\tau, \tau\beta = \gamma\delta$. 而$\mathcal{I} = \langle \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha \rangle$, 从而$\mathrm{T}A$的可容理想为:

$\widetilde{\mathcal{I}} = \langle \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha, \delta\tau, \tau\sigma, \sigma\delta, \alpha\sigma\alpha, \sigma\alpha\sigma, \beta\tau\beta, \tau\beta\tau, \gamma\delta\gamma, \delta\gamma\delta, \delta\gamma - \alpha\sigma, \sigma\alpha - \beta\tau, \tau\beta - \gamma\delta \rangle$.

而$\mathrm{T}A = K\widetilde{Q}/\widetilde{\mathcal{I}}$的一组由路组成的基为

$$\{e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau, \delta, \alpha\sigma, \beta\tau, \gamma\delta\}.$$

$\mathrm{T}A$的完备圈集为$\{C_1, C_2, C_3\}$, 其中

$$C_1\colon \begin{tikzcd} {}_3\circ \arrow[r, bend right, "\tau"'] & \circ_2 \arrow[l, bend right, "\beta"'] \end{tikzcd}, \quad C_2\colon \begin{tikzcd} {}_1\circ \arrow[r, bend right, "\delta"'] & \circ_3 \arrow[l, bend right, "\gamma"'] \end{tikzcd}, \quad C_3\colon \begin{tikzcd} {}_2\circ \arrow[r, bend right, "\sigma"'] & \circ_1 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

从而$\Lambda_1 = \{\beta, \tau\}$, $\Lambda_2 = \{\gamma, \delta\}$, $\Lambda_3 = \{\alpha, \sigma\}$ 则以$\mathrm{T}A$为平凡扩张代数的所有monomial代数由8 个子图生成(可能有同构的情况, 可容理想通过$\widetilde{\mathcal{I}}$生成), 最终整理得$\mathrm{T}A$为平凡扩张代数的所有monomial代数总共有2个:

$$\begin{tikzcd} & \overset{1}{\circ} \arrow[dr, "\alpha"] & \\ {}_3\circ \arrow[ur, "\gamma"] & & \circ_2 \arrow[ll, "\beta"] \end{tikzcd} \qquad \mathcal{I} = \langle \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha \rangle,$$

$$\begin{tikzcd} & \overset{1}{\circ} \arrow[dr, "\alpha"] & \\ {}_3\circ \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[rr, "\tau"'] & & \circ_2 \end{tikzcd} \qquad \mathcal{I} = \langle \gamma\alpha \rangle,$$

例子 5.1.3: 设$A = KQ/\mathcal{I}$, 这里箭图Q如下:

$$\begin{tikzcd} & \overset{1}{\circ} \arrow[d, "\alpha"] & \\ {}_2\circ & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, "\gamma"] & \circ_4 \end{tikzcd}$$

而$\mathcal{I} = \langle \alpha\gamma \rangle$, 那么$A$是monomial代数, 而容易知道$A$的$K-$路基为$\Gamma = P = \{e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta\}$, 局部最长路集为$\Gamma_3 = \{\alpha\beta, \gamma\}$, 从而$A$的平凡扩

张TA的底图$\widetilde{Q}$如下:

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[d, "\alpha"] & \\
2 \arrow[ur, "\delta"] & 3 \arrow[l, "\beta"] \arrow[r, bend left, "\gamma"] & 4 \arrow[l, bend left, "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

其中$\delta = f_{\alpha\beta}$, $\sigma = f_{\gamma}$. 容易看到, 排他关系要求$\sigma\beta = 0$; 长度关系要求$\alpha\beta\delta\alpha = \beta\delta\alpha\beta = \delta\alpha\beta\delta = 0$, $\sigma\gamma\sigma = \gamma\sigma\gamma = 0$; 由于$e_3$是局部最长路$\alpha\beta$和$\gamma$的公共部分,从而分享关系要求$\beta\delta\alpha = \gamma\sigma$. 而由于$\mathcal{I} = \langle\alpha\gamma\rangle$, 从而T$A$的可容理想为:

$$\widetilde{\mathcal{I}} = \langle\alpha\gamma, \sigma\beta, \alpha\beta\delta\alpha, \beta\delta\alpha\beta, \delta\alpha\beta\delta, \sigma\gamma\sigma, \gamma\sigma\gamma, \beta\delta\alpha - \gamma\sigma\rangle.$$

而T$A = K\widetilde{Q}/\widetilde{\mathcal{I}}$的一组由路组成的基为

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta, \delta, \sigma, \delta\alpha, \beta\delta, \sigma\gamma, \gamma\sigma, \delta\alpha\beta, \alpha\beta\delta\}.$$

TA的完备圈集为$\{C_1, C_2\}$, 其中

$$C_1: \begin{tikzcd}
& 1 \arrow[d, "\alpha"] \\
2 \arrow[ur, "\delta"] & 3 \arrow[l, "\beta"]
\end{tikzcd}, \quad C_2: \begin{tikzcd}
3 \arrow[r, bend left, "\gamma"] & 4 \arrow[l, bend left, "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

从而$\Lambda_1 = \{\alpha, \beta, \delta\}$, $\Lambda_2 = \{\gamma, \sigma\}$, 则以T$A$为平凡扩张代数的所有monomial代数由下列6 个子图生成(可能有同构的情况, 可容理想通过$\widetilde{\mathcal{I}}$生成)

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[d, "\alpha"] & \\
2 & 3 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, "\gamma"] & 4
\end{tikzcd} \qquad \mathcal{I} = \langle\alpha\gamma\rangle,$$

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[d, "\alpha"] & \\
2 & 3 \arrow[l, "\beta"'] & 4 \arrow[l, "\sigma"']
\end{tikzcd} \qquad \mathcal{I} = \langle\sigma\beta\rangle,$$

$$\begin{tikzcd}
2 \arrow[r, "\delta"] & 1 \arrow[r, "\alpha"] & 3 \arrow[r, "\gamma"] & 4
\end{tikzcd} \quad \mathcal{I} = \langle\alpha\gamma\rangle,$$

$$\begin{tikzcd}
2 \arrow[r, "\delta"] & 1 \arrow[r, "\alpha"] & 3 & 4 \arrow[l, "\sigma"']
\end{tikzcd} \quad \mathcal{I} = 0,$$

$$_2\circ \xleftarrow{\beta} \underset{1}{\circ} \xleftarrow{\alpha} \underset{3}{\circ} \xrightarrow[\gamma]{} \circ_4 \ \mathcal{I}=0,$$

$$_2\circ \xleftarrow{\beta} \underset{1}{\circ} \xleftarrow{\alpha} \underset{3}{\circ} \xleftarrow{\sigma} \circ_4 \ \mathcal{I}=\langle\sigma\alpha\rangle$$

注意到它们两两不同构, 则以$\mathrm{T}A$为平凡扩张代数的所有monomial代数总共有6个, 恰好取到推论4.7的上界.

事实上, 从推论4.7的过程, 当monomial代数的平凡扩张代数的底图的对称性越差, 以其为平凡扩张的monomial代数的个数越接近上界.

§ 5.2 Lowey长度

下面我们给出定理4.2的一个简单的应用. 在文献[1]中,Loewy长度定义如下:

定义 5.1: 设A是域K上的有限维的基代数, M是任意的有限生成(右)A模, 那么有

$$\inf\{m\in\mathbb{N}|\mathrm{rad}^m M=0\}\in\mathbb{N}$$

这里$\mathbb{N}$表示全体自然数, 这个值称为模M_A 的Loewy 长度, 记为$ll(M)$.

在不混淆的情况下, 我们把$ll(A)$, $ll(\mathrm{T}A)$分别记作A作为$A-$模的Loewy长度和$\mathrm{T}A$作为$\mathrm{T}A-$模的Loewy长度, 那么我们有下面推论:

推论 5.2: 设A是K上的monomial代数, $\mathrm{T}A$是A的平凡扩张, 那么有$ll(\mathrm{T}A)=ll(A)+1$, 其中$ll(A)$表示A的Loewy长度.

证明: $\mathrm{rad}^i A$表示$A\cong KQ/\mathcal{I}$中长度不小于i生成的线性空间, 则$ll(A)=m$表示存在Q上的路ρ使得ρ的长度为$m-1$, 且ρ是所有在A 中不为0的所有路中最长的, 从而ρ必然是局部最长路, 另外考虑到平凡扩张中的长度关系和排他关系, 可以知道$(\rho,0)(0,f_\rho)$是所有在$\mathrm{T}A$中不为0 的所有路中最长的, 由此可知$ll(\mathrm{T}A)=ll(A)+1$. $\square$

参考文献

[1] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, London Math. Soc. Stud. Texts 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[2] D. Hughes and J. Waschbüsch, *Trivial extensions of tilted extensions of tilted algebras*, Proc. Londan Math. Soc.(3)**46**(1983), no. 2, 347-364.

[3] D. Happel, *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*, London Math Soc Lecture Note, Vol 119. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

[4] J. Schröer, *On the quiver with relations of a repetitive algebra*, Arch. Math. 72(1999) 426-432.

[5] E. A. Fernández, M. I. Platzeck, *Presentations of Trivial Extensions of Finite Dimensional Algebras and a Theorem of Sheila Brenner*, Journal of Algebra 249, 326 – 344 (2002)

[6] E. A. Fernández, M. I. Platzeck, *Isomorphic trivial extensions of finite dimensional algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra 204 (2006) 9 – 20.

[7] P. Gabriel, *Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras*, LNM, 1980.

[8] A. Skowroński, K. Yamagata, *Galoiw coerings of selfinjective algebras by repetitive algebras*, Transactions Amer. Math. Soc. Volume 351, Number 2, Feb. 1999, Pages 715-734.

[9] H. Tachikawa, *Representations of trivial extensions of hereditary algebras*, "Proceedings ICRA II, 1979," Springer Lecture Notes, No. 832, pp. 579-599, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

攻读硕士学位期间完成的学术论文

[1]蔡毓麟, Monomial代数的重复代数和平凡扩张代数.

[2]蔡毓麟, 变换箭图的推出.

致　谢

七年的厦大时光就要结束了, 感觉时间过得很快, 这里见证自己的成长. 从三年前看着同学一个个离开, 到现在自己也将要离开, 我遇到了新同学和新朋友, 他们让我的这三年不孤单.

这些年来, 首先想感谢的, 就是我的导师, 林亚南老师. 是他让我有机会顺利延续自己的数学生涯, 在我由于英语上的困难而不能保研的时候, 提供给我这个难得的机会, 我只希望自己三年的学习, 和将来在数学的努力, 能让他觉得这是个正确的决定. 当然, 除此之外, 林老师在学术上严谨的态度, 对文章严格的要求, 为人正直的人格, 一直影响我. 他不仅在数学上悉心指导, 也经常关心我的生活. 老师还尽可能为我们的学习和提高提供各种机会, 比如, 邀请国内外专家和让我们参加各种学术会议, 使我们了解到学术前沿的同时认识到自己的不足, 让我能够参加各种暑期学校, 包括在北大的短期学习, 浙大和哈工大的暑期学校等等. 在与林老师的交流和讨论中, 我也逐渐认识到自己的一些缺点, 比如, 在表达上不够清晰, 有时没能从切实的例子找思路. 我相信在后面的路上, 我会好好地改正自己缺点.

研究生期间, 当两个学期的助教, 让我在指导学生的同时, 也得到了提高. 我和祝辉林老师有着共同的对数论的热爱, 这也让我们经常进行讨论. 在作为他的助教的一个学期, 让我对基础数论的掌握更加扎实了. 林鹭老师对学生耐心和认真, 对我的影响很大, 虽然对我来说也是个挑战, 但也锻炼了自己的备课和讲课的能力, 同时也认识一些学弟学妹们. 诚挚地感谢两位老师.

感谢数学学院的行政人员, 他们一丝不苟的工作态度, 让我们能够专心进行学术的交流和学习. 记得两年前的暑期学校, 负责的陈李媛老师, 林智雄老师和林煜老师经常为参加的外校同学解决各种问题, 让他们感受到厦大数学学院的风采, 也让我们作为厦大的一员而感到骄傲. 特别是最近, 在我申请CSC过程中出现疏忽的时候, 陈李媛老师和林智雄老师积极帮我解决问题, 让我备受感动. 感谢你们, 你们让厦大数院能够每天正常地运转.

还要感谢从本科到研究生的任课老师们, 数学分析张中新老师, 高等代数杜妮老师, 解析几何宋宇萍老师, 实变函数伍火熊老师, 抽象代数谭绍滨老师, 复变函数严荣沐老师...你们上课时认真和对学生负责的态度, 让你们的学生受益匪浅, 从心底里尊重和感谢你们. 特别是谭绍滨老师和严荣沐老师, 每次参加夏令营或者暑期学校, 我总会麻烦两位老师帮我写推荐信, 感谢你们一直以来对我的照顾.

感谢我的同门师兄师姐和师弟们: 陈健敏老师, 阮诗佺, 陈金晶, 邱晓龙, 周振强, 许燕青, 李云春, 林玉娜, 李振华, 陈明发, 董强. 和你们讨论问题, 总能让我学习到很多东西. 特别是周振强师兄, 在范畴方面对我帮助很大, 也经常指导我的学习.

感谢暑期学校的各位老师, 教给我的不仅是数学的知识, 还有对待数学的态度. 感谢刘青老师, 三年来带我学习代数几何, 并且让我有机会跟着您继续学习.

感谢我的同学们和朋友们, 离开总是伤感的, 但那些美好的回忆会带我们各自继续前进. 我期待我们以后的相聚, 聊起在厦大时的伤心和快乐.

最后, 最深的感谢给我的父母. 儿子一直以来都没能好好孝敬你们, 甚至违背你们的想法, 但你们还是一如既往地鼓励和支持我. 看着你们年轻不再, 我却还任性地去追逐自己的梦想. 我知道你们有无数的不舍, 你们不曾说出.

从本科一路走来, 有许多感悟一直指导我的生活和学习:

- 性格决定命运.
- 40岁之前能在数学界做出一番事业的, 一般都是天才, 一般人都是在50岁左右. 数学是一种生活态度, 每天做点数学, 保证每天都进步一点点, 才能积少成多. – 江迪华
- 知之为知之, 不知为不知, 是知也.
- 有很多事情, 我们不能完成, 但有更多的事情, 我们不愿意付出努力去做, 只是因为不想超出让自己舒服的区域.